Università di Pisa

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Modelli basati su generazione di colonne per l'ottimizzazione su reti di telecomunicazione

Candidato:
Francesco Demelas

Relatore:
Prof. Antonio Frangioni

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione **iii**

1 Il Problema Reale **1**

1.1 Istanze 4

2 Modello matematico **7**

2.1 Modello Compatto 8

2.2 Semplificazione del modello con antenne di riferimento 12

2.3 Approssimazione lineare del problema 13

3 Approccio Column Generation **18**

4 Modelli Column Generation "ai 15 secondi" **22**

4.1 Modello con matrice delle interferenze 22

4.2 Modello con stime precise dell'interferenza 25

5 Modelli Column Generation "ai 15 minuti" **31**

5.1 Modello con domande variabili 32

5.2 Modello con probabilità di allocazione blocchi 38

5.3 Modello con patterns estesi 42

6 Sperimentazione **46**

6.1 Sperimentazioni con 3 esagoni 48

6.1.1 Confronto tra macro-antenne e macro-micro di riferimento 48

6.1.2 Sperimentazioni con differenti basi di partenza 50

6.2 Sperimentazioni con 6 esagoni 52
6.2.1 Confronto tra macro-antenne e macro-micro di riferimento 52
6.2.2 Sperimentazioni con differenti basi di partenza 54
6.3 Sperimentazioni su molti esagoni 55
6.4 Confronto con il modello compatto 61

Introduzione

Al giorno d'oggi le reti di calcolatori costituiscono il principale consumatore di energia elettrica al mondo, appare quindi evidente la necessità di ridurre questo consumo. A tale scopo si può procedere in due modi distinti: si può cercare di migliorare le prestazioni hardware delle macchine, oppure cercare algoritmi in grado di ottimizzare le prestazioni globali della rete.
Noi ci siamo concentrati sulla seconda strada cercando dei modelli matematici che ci consentissero di ottimizzare le prestazioni delle reti di telecomunicazione, in particolare abbiamo considerato le reti wireless. Osserviamo che ciò può portare un notevole aumento delle prestazioni della rete, infatti attualmente gli algoritmi utilizzati per la gestione delle reti sono principalmente pensati per poter soddisfare costantemente un'elevata domanda, che però è effettiva solo in alcuni momenti critici, discuteremo pertanto degli approcci che ci consentano di risparmiare energia nel restante arco della giornata.
Un approccio di questo tipo risulta particolarmente efficiente per reti *eterogenee* nelle quali sono presenti alcune antenne che soddisfano la maggior parte della domanda, chiamate *macro* (che devono sempre rimanere accese) alle quali si affiancano altre antenne più piccole, chiamate *micro*, che hanno lo scopo di coprire un'eventuale richiesta che la macro da sola non è in grado di gestire, pertanto queste antenne possono essere attivate e disattivate a seconda della domanda.
Ottimizzare un tipo di reti come questo non è un problema semplice, infatti dovremo non solo determinare la configurazione ottimale delle antenne, in termini di accensione e spegnimento, al fine di minimizzare il consumo energetico, ma anche cercare di far si che ogni antenna serva i propri utenti

creando la minima interferenza possibile nel sistema. Possiamo quindi vedere il nostro problema come suddiviso in due sotto-problemi, il primo dei quali, riguardante l'accensione e lo spegnimento delle antenne, andrà risolto in un lasso di tempo più lungo (circa 15 minuti) mentre il secondo, che riguarda le frequenze utilizzate dalle antenne per trasmettere segnale ai propri utenti, dev'essere risolto in tempi più brevi (circa 15 secondi).
Purtroppo, nonostante ciò, entrambi i problemi sono difficili, essendo problemi misti-interi non-lineari e non-convessi, pertanto per affrontarli è necessario utilizzare strumenti complessi in modo non banale, quali ad esempio la discretizzazione.
Osserviamo che in realtà l'operazione di spegnimento e accensione delle antenne non può essere fatta molte volte, poichè ciò, a lungo andare comporterebbe una rapida usura delle componenti fisiche. Inoltre l'accensione di un'antenna richiede diverso tempo a causa dell'avvio del sistema operativo e di alcuni software. Tuttavia trascureremo quest'ultimo aspetto per concentrarci unicamente sulla strategia più efficiente di accensione e spegnimento delle antenne.
Per ottimizzare le prestazioni delle reti analizzeremo e confronteremo due approcci differenti, inizialmente abbiamo introdotto alcuni modelli precedentemente studiati per risolvere il problema, quindi abbiamo presentato una tecnica risolutiva basata sulla generazione di colonne (*Column Generation*), per poi introdurre dei modelli *pattern-based*, per entrambi i sotto-problemi, che possano essere risolti attraverso questa tecnica. Inoltre abbiamo sfruttato le caratteristiche del problema reale in modo differente da quanto fatto finora, approfittando maggiormente del fatto che alcune antenne, chiamate *macro*, hanno la caratteristica di dover restare sempre accese, mentre altre, dette *micro*, possono accendersi e spegnersi.
Nella tesi proponiamo molti modelli che si differenziano tra loro, non solo per l'idea costruttiva che vi è dietro, ma anche per come essi approssimano il problema reale, cosa che sappiamo essere molto importante per questo tipo di problemi; inoltre per ogni modello proposto presentiamo delle varianti che ci permettano di sfruttare differentemente le caratteristiche del problema reale.
Infine abbiamo implementato uno dei nuovi modelli proposti per potervi fare

delle sperimentazioni e confrontarlo con uno dei modelli precedentemente studiati.

Capitolo 1

Il Problema Reale

Presenteremo ora il problema da un punto di vista generale, per il momento senza introdurre un modello matematico, ma solo evidenziando la struttura globale del problema e gli elementi che abbiamo a disposizione per risolverlo. L'area su cui dovremo lavorare viene suddivisa in esagoni, in ognuno dei quali sono presenti tre *antenne*: una macro e due micro (come mostrato in figura (1.1)). Le *macro* sono antenne più potenti che devono restare sempre accese ed hanno il compito di soddisfare la maggior parte della domanda durante tutto l'arco della giornata, a queste si affiancano le *micro*, antenne più piccole che, potendosi accendere e spegnere, hanno lo scopo di supportare la macro durante le ore più critiche della giornata. Per poter trasmettere il segnale ai suoi utenti ogni *nodo* (/*antenna*) può allocare un certo numero di *blocchi*.

Avremo quindi che il costo energetico totale di un'antenna è dato dalla somma del costo della sua accensione con i costi di trasmissione, dati a loro volta dal costo di trasmissione per un singolo blocco per il numero di blocchi attivati. In particolare, poichè le macro devono restare sempre accese possiamo considerare il loro costo di accensione pari a zero.

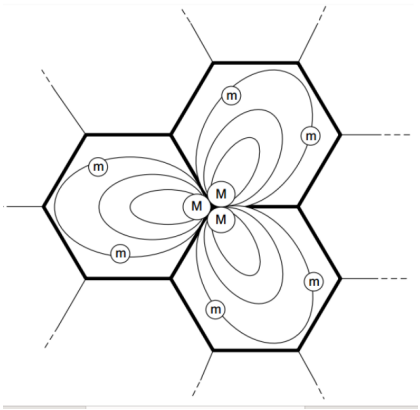

Figura 1.1:

Data una configurazione, per ogni antenna e per ogni utente è possibile calcolare la potenza del segnale che, da ogni blocco del nodo, arriva all'utente, chiamiamo questa potenza SINR. Per poter avere trasmissione è necessario che il SINR superi una soglia minima $\sigma_{\min}$, dopo la quale avremo che la *velocità di trasmissione* crescerà linearmente sino ad una certa velocità massima $\eta_{\max}$ (che viene raggiunta quando il $SINR$ è pari a $\sigma_{\max}$).

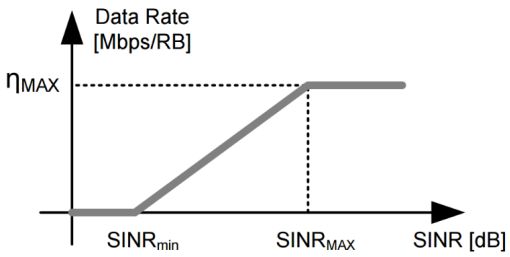

Figura 1.2:

Considereremo inoltre la funzione $F(SINR)$ che esprime quanto cresce la velocità di trasmissione al variare del $SINR$.

Vogliamo ora capire cosa comportino, sia da un punto di vista energetico che da quello dell'efficienza, l'accensione e lo spegnimento delle micro in una data configurazione. In generale quando una macro è in sovraccarico,

l'accensione delle micro del suo esagono riduce l'interferenza causata dalla macro migliorando quindi l'efficienza della rete. Per rendere meglio l'idea possiamo considerare alcuni casi significativi, in particolare consideriamo un esagono h_0 e consideriamo i seguenti casi: $(-|-)$ se tutte le micro sono spente, $(m|m)$ se tutte le micro sono accese, $(-|m)$ se sono accese tutte le micro tranne quelle in h_0 e $(m|-)$ se sono accese solo le micro in h_0. I risultati delle misurazioni sono illustrati in figura:

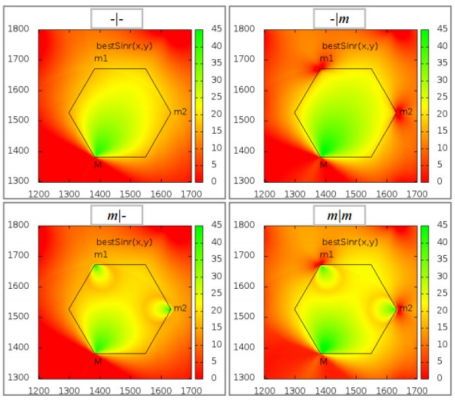

Figura 1.3:

Dal punto di vista energetico l'accensione di una micro comporta un aumento nel dispendio di energia che si andrà a sommare alla potenza necessaria per l'allocazione di ogni blocco della micro. D'altra parte accendendo una micro possiamo diminuire i blocchi che alloca la macro, che solitamente consumano più energia rispetto a quelli della micro. Dunque, dal punto di vista energetico, è conveniente accendere una micro quando questa allocherà un sufficiente numero di blocchi.
Purtroppo però non è possibile conoscere a priori quanti blocchi allocherà la micro, poichè per saperlo dovremmo essere a conoscenza di quale sarà il valore del SINR della micro dopo essere stata accesa, ma questo dipende a sua volta da quanti blocchi allocherà la micro.

1.1 Istanze

Per ottimizzare l'efficienza della rete l'idea che seguiremo è di calcolare lo stato ottimale del sistema nel prossimo intervallo di tempo basandoci su dati e statistiche raccolti mediante misurazioni sul campo, per poi ripetere l'operazione per il prossimo lasso di tempo e così via.
Per poter testare i modelli abbiamo avuto bisogno di istanze del problema da far risolvere al solutore; per ottenerle ci siamo rivolti al dipartimento dell'ingegneria dell'Informazione, essendo quest' ultimo un attore chiave a livello internazionale in questo settore.

Per comprendere meglio l'obiettivo di questo progetto e la necessità di utilizzare istanze realistiche è necessario descrivere, a grandi linee, il contesto in cui si inserisce il nostro lavoro. Ottimizzare una rete come quella che stiamo trattando è un problema molto complicato, poichè vi sono molto aspetti difficili da bilanciare.
Infatti, oltre l'aspetto energetico, bisogna anche tener conto del fatto che le antenne, quando accese, provocano un' interferenza reciproca, che è tanto più alta quanto è grande il SINR. Pertanto, anche disinteressandoci del limite energetico, se il nostro scopo è aumentare la banda ricevuta dagli utenti, non è detto che basti aumentare il numero di blocchi allocati dalle antenne poichè ciò farebbe aumentare l'interferenza totale del sistema andando a compromettere qualsiasi miglioramento, se non peggiorando la situazione attuale.
Per capire meglio come venga influenzata la resa della rete possiamo suddividere il problema in tre sottoproblemi:

1. Decidere (ogni millisecondo), per ogni antenna, su quali blocchi trasmettere segnale agli utenti connessi;

2. Decidere (circa ogni 15 secondi), per ogni antenna, su quali blocchi trasmettere per minimizzare l'interferenza totale del sistema;

3. Fissato un intervallo di tempo abbastanza grande (circa 15 minuti), che chiameremo *snapshot*, quali antenne accendere e quali antenne spegnere per evitare sprechi energetici.

Noi ci concentreremo in particolare sul secondo e sul terzo problema. Presenteremo inizialmente il modello precedentemente studiato che si occupa unicamente del terzo problema, infatti non si occupa del secondo problema in quanto considera un'allocazione randomica dei blocchi per stimare lo scenario di interferenza del sistema. Dopodichè presenteremo una tecnica risoltiva di generazione di colonne ed anche un modello già studiato per il secondo problema che sfrutti quest' approccio risolutivo. Quindi proporremo un nuovo modello per questo problema, che però consideri delle stime più precise per ricavare l'interferenza del sistema. Partendo da quest'ultimo modello cercheremo di generalizzarlo per trovare dei modelli che sfruttino il metodo di generazione di colonne, ma siano anche capaci di decidere in modo ottimale quali antenne accendere e quali spegnere nel prossimo snapshot; esporremo quindi i modelli trovati, che si distinguono tra loro, non solo per le idee seguite durante la realizzazione, ma anche per complessità nella risoluzione e precisione dei valori considerati.

Osserviamo ancora che i dati che ci vengono dati in input non sono esatti, ma solo una media di ciò che ci aspettiamo accada durante il prossimo snapshot, pertanto anche la soluzione sarà in realtà una media del comportamento desiderato dalle antenne.

Per poter capire se le scelte fatte dal nostro modello siano buone dovremo simularlo. Il dipartimento di Ingegneria ha sviluppato un software capace di simulare con precisione l'intero sistema.
Attualmente in questo software è implementato un solutore basato sul primo modello, noi svilupperemo un solutore basato sul secondo modello, poi confronteremo sperimentalmente i comportamenti dei due diversi approcci sulle stesse istanze.

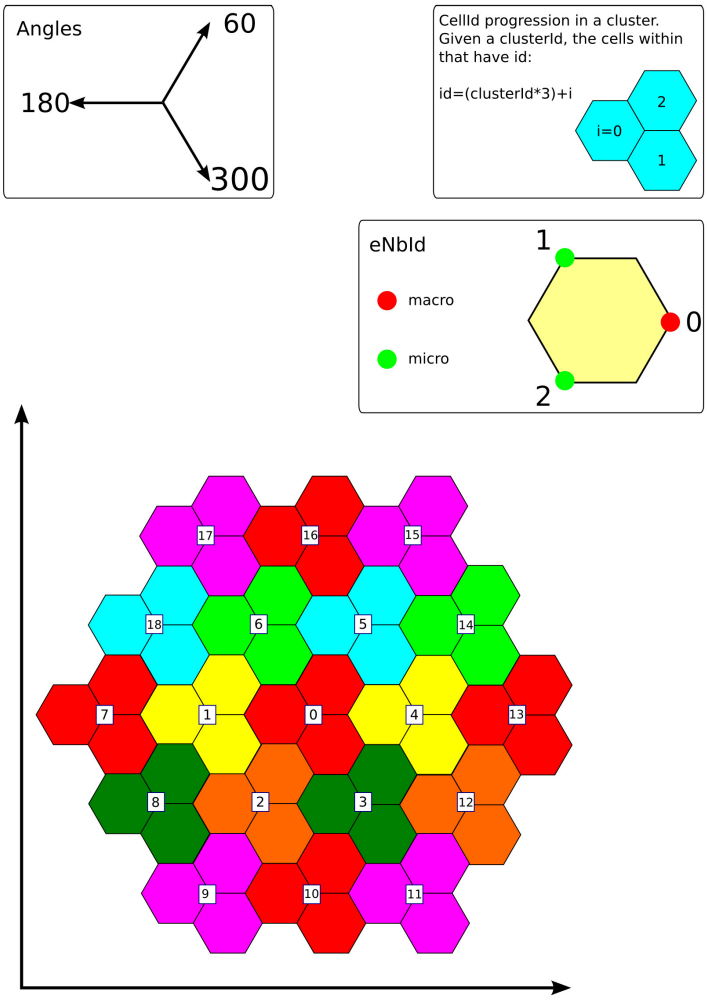

Figura 1.4: il "mondo" su cui lavora il software degli ingegneri, composto da 57 esagoni ognuno con 3 antenne

Capitolo 2

Modello matematico

Introdurremo ora gli elementi base che utilizzeremo per poter descrivere il nostro problema come un problema di programmazione lineare intera per poter così utilizzare gli algoritmi che conosciamo.

Assumeremo che i seguenti dati ci vengano forniti in input:

- Un insieme A di antenne (o nodi).
- Per ogni antenna $a \in A$, il costo di accensione F_a ed il costo di trasmissione di un blocco f_a. Non sarà influente sapere se l'antenna è una macro o una micro dato che basta considerare 0 il costo di attivazione delle macro (infatti queste dovranno restare sempre accese).
- Il numero massimo di blocchi attivabili B, che è uguale per ogni antenna.
- Il budjet P di energia disponibile.
- Un insieme C di centroidi, che rappresentano aggregazioni di utenti vicini.
- Per ogni centroide $c \in C$ la corrispettiva domanda D_c.
- Per ogni centroide $c \in C$ e per ogni antenna $a \in A$ il valore $P_{a,c}$ della potenza che l'antenna a trasmette al centroide c.

- Due insiemi $S(c)$ ed $A(c)$:
  - $S(c)$ è l'insieme delle antenne che possono trasmettere al centroide c;
  - $A(c)$ è l'insieme delle antenne che, se accese, creano interferenza al segnale ricevuto da c;

  Osserviamo che la precedente distinzione è necessaria per distinguere il caso in cui il segnale di un'antenna a' può raggiungere il centroide c, ma non è abbastanza forte per poterlo servire (questo si verifica quando il SINR è inferiore a $\sigma_{\min}$).
  Risulta inoltre evidente che $S(c) \subset A(c)$, infatti possiamo scrivere $A(c) = \{a \in A \mid P_{a,c} > 0\}$.

- Definiamo infine:
  - $S = \{(a, c) \mid c \in C \;\; a \in S(c)\}$;
  - $A(a) = \{c \in C \mid a \in A(c)\}$;
  - $S(a) = \{c \in C \mid a \in S(c)\}$;

2.1 Modello Compatto

Prima di poter formulare il primo modello dobbiamo essere in grado di calcolare il $SINR$ da un'antenna a ad un centroide c, che è dato da:

$$SINR_c^a = \frac{P_c^a}{N_G + \sum_{x \neq a} P_c^x \Delta_{a,x} / n_a}$$

dove N_G è l'interferenza gaussiana, P_c^x la potenza del segnale dall'antenna x al centroide c, $\Delta_{a,x}$ la probabilità che due antenne a e x trasmettano sugli stessi blocchi di un certo centroide ed infine n_a è una variabile che ci dice qual'è il numero di blocchi attivi nell'antenna a.
Per poter calcolare $SINR_c^a$ abbiamo prima bisogno di calcolare il valore $\Delta_{a,x}$, ma , come detto in precedenza, supporremo per questo modello che le antenne

allochino i blocchi in maniera randomica, dunque avremo che vale:

$$\Delta_{a,a'}(n) = \sum_{k=\max\{1,n^a+n^{a'}-B\}}^{\min\{n^a,n^{a'}\}} k \frac{\binom{n^a}{k}\binom{B-n_a}{n^{a'}-k}}{\binom{B}{n^{a'}}} \tag{2.1}$$

che può essere riscritta come

$$\Delta_{a,a'}(n) = (n^a n^{a'})/B \ . \tag{2.2}$$

dove n è il vettore degli n_a.

Pertanto, data una certa configurazione del sistema, abbiamo che per ogni antenna $a \in A$ e per ogni centroide $c \in C$ vale:

$$SINR_c^a(n) = \frac{P_c^a}{N_G + \sum_{a' \in A(c) \setminus \{a\}} P_c^{a'} n_{a'}/B} \tag{2.3}$$

Quindi il $SINR$ dipenderà solamente dal vettore n degli n_a e per $a \in A$ e $c \in C$ fissati chiameremo $SINR_c^a(n)$ la funzione che associa ad ogni n il $SINR$ corrispondente.

A questo punto, sapendo che la funzione che associa al $SINR$ la rispettiva velocità di trasmissione è lineare a tratti e supponendo di conoscere i valori $\sigma_{\min}$ e $\sigma_{\max}$ indicanti, rispettivamente, il valore del $SINR$ sotto il quale non vi è trasmissione ed il valore del $SINR$ sopra il quale la velocità di trasmissione è pari a $\eta_{\max}$ (supponiamo anche quest'ultimo noto), possiamo scrivere la funzione $F(SINR)$ come segue:

$$F(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq \sigma_{\min} \\ \eta_{\max} \frac{s-\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}-\sigma_{\min}} & \text{se } \sigma_{\min} < s < \sigma_{\max} \\ \eta_{\max} & \text{se } s \geq \sigma_{\max} \end{cases}$$

Possiamo a questo punto trovare la potenza fornita dall'antenna a al centroide c che è data da $F(SINR_c^a(n))m_{a,c}$, dove $m_{a,c}$ indica il numero di blocchi dell'antenna a dedicati al centroide c. Questa funzione ci è utile anche per poter calcolare il numero di blocchi da dedicare ad un dato utente con domanda D, che saranno $\frac{D}{F(SINR)}$; osserviamo che anche se questa quantità non è intera ciò non costituisce un vero problema, poichè lavoriamo su un

intervallo di tempo abbastanza lungo (circa 15 minuti) quindi questo valore può essere considerato come una media su quest'intervallo, quindi, ad esempio, se il numero di blocchi necessari è 2,5 potremo considerare come se nel primo periodo servissero 2 blocchi e poi 3.

Per quanto visto siamo portati a definire le seguenti variabili per definire il nostro modello:

- $x_a \in \{0,1\},\ a \in A$, indicanti se l'antenna a è accesa o spenta
- $n_a,\ a \in A$, simboleggiano il numero di blocchi attivi dell'antenna a
- $m_{a,c},\ a \in A,\ c \in C$, rappresentano quanti blocchi dell'antenna a sono dedicati al centroide c
- $v_c,\ c \in C$, indicano quanto è soddisfatta, in percentuale, la domanda del corrispettivo centroide c

Possiamo ora formulare il modello:

$$\max \textstyle\sum_{c \in C} v_c \tag{2.4}$$

$$v_c \leq 1 \qquad c \in C \tag{2.5}$$

$$v_c \leq \left(\textstyle\sum_{a \in S(c)} F(SINR_c^a(n)) m_c^a\right)/D_c \qquad c \in C \tag{2.6}$$

$$\textstyle\sum_{c \in S(a)} m_c^a \leq n^a \qquad a \in A \tag{2.7}$$

$$0 \leq m_c^a \leq B \qquad (a,c) \in S \tag{2.8}$$

$$0 \leq n^a \leq B x^a \qquad a \in A \tag{2.9}$$

$$\textstyle\sum_{a \in A} F^a x^a + f^a n^a \leq P \tag{2.10}$$

$$x^a \in \{0,1\} \qquad a \in A \tag{2.11}$$

Il vincolo (2.5) fa si che la potenza superflua fornita ai centroidi vada sprecata e quindi il modello tenda ad essere energicamente-efficiente. Il lato destro di (2.6) è proprio la percentuale di soddisfazione della domanda del centroide, essendo il problema di massimo e dato che le v_c appaiono con segno positivo nella funzione obiettivo, il modello tenderà a far crescere queste ultime variabili che dunque assumeranno il massimo valore consentito da (2.5) e (2.6).

Le equazioni (2.7) (2.8)(2.9) sono i vincoli "naturali" che legano numero totale di centroidi attivati per antenna e numero di blocchi che un'antenna dedica ad un centroide, infatti (2.9) fà si che le antenne possano allocare blocchi solo se accese e che al più ne vengano allocati B, (2.7) fa si che la somma dei blocchi che un' antenna dedica ai vari centroidi non superi i numero di blocchi che ha effettivamente a disposizione, (2.8) è in realtà ridondante essendoci già (2.7) ma ci aiuta comunque a stringere la regione ammissibile del problema. Infine il vincolo (2.10) garantisce che l'energia totale consumata non sia superiore al budget disponibile.

Notiamo che, poichè stiamo lavorando su un intervallo di tempo abbastanza lungo, non è necessario imporre che le variabili n_a e $m_{a,c}$ siano in $\mathbb{Z}$, il che avrebbe aumentato notevolmente la complessità del modello. Questo perchè, benchè queste variabili rappresentino quantità intere, il loro valore è in realtà una media di ciò che ci aspettiamo che accada durante il prossimo snapshot.

É importante osservare che per come è stata formulata la funzione obiettivo non è uniforme sulla distribuzione del segnale, ovvero tra due soluzioni aventi lo stesso valore della funzione obiettivo, una delle quali con alcuni v_c molto bassi ed altri molto alti ed una con i v_c molto vicini tra loro, il modello non avrà preferenze.
Se si è interessati ad assicurare una copertura completa e senza buchi è sufficiente sostituire (2.4) e (2.5) con:

$$\max v \tag{2.12}$$

$$v \leq 1 \qquad \forall c \in C \tag{2.13}$$

$$v \leq \left(\sum_{a \in S(c)} F\left(SINR_c^a(n)\right) m_{a,c}\right) / D_c \qquad \forall c \in C \tag{2.14}$$

Se si volesse invece un modello che si interessi più ad alcuni centroidi rispetto ad altri, si potrebbe introdurre un *vettore dei pesi* $w = [w_c]_{c \in C}$ che rappresenta l'importanza dei centroidi e considerare come funzione obiettivo $\sum_{c \in C} v_c w_c$.

Nell'attuale formulazione però questo modello presenta elementi quadrati-

ci e fortemente non convessi (si veda il vincolo (2.6)) che rendono la sua risoluzione molto lunga e complicata anche utilizzando macchine potenti ed algoritmi efficienti.
Per ovviare a questo problema dovremo attuare alcune modifiche al modello per renderlo *meno complesso* e quindi più semplice da trattare.

2.2 Semplificazione del modello con antenne di riferimento

Osserviamo che al fine di mantenere bassa la complessità computazionale è ragionevole considerare, per ogni centroide, un' *antenna di riferimento*, che sarà l'antenna che gli fornisce la maggiore potenza di trasmissione in uno scenario privo di interferenza (verosimilmente una micro o macro nel suo esagono). Analogamente, per ogni centroide, avente come antenna di riferimento una micro, considereremo anche una *macro di riferimento* che sarà la macro che gli può fornire la maggiore potenza di trasmissione.
Pertanto avremo che, ogni centroide verrà servito dalla sua antenna di riferimento, se accesa, altrimenti verrebbe servito dalla sua macro di riferimento.

Possiamo quindi introdurre i due seguenti insiemi di centroidi $R(a)$ e (se a è una macro) $R'(a)$ per rappresentare, rispettivamente, i centroidi aventi a come antenna di riferimento ed i centroidi aventi a come macro di riferimento, ossia considereremo $R(a) = \{c \in C \mid \ P_{a,c} \geq P_{a',c} \ \forall a' \in A \setminus \{a\}\}$ e, se a è una macro, $R'(a) = \{c \in C \mid \ P_{a,c} \geq P_{a',c} \ \forall a' \in A \setminus \{a\}\}$.

Un'ulteriore variante consiste nell'imporre che l'antenna di riferimento sia una micro, quindi nelle sperimentazioni che faremo considereremo entrambe le varianti per poterle confrontare e capire quale delle due sia più efficiente.

Poniamo per comodità $\tilde{R}(a) = R(a) \cup R'(a)$; dove possiamo definire $R'(a) = \emptyset$ se a è una micro.

Possiamo quindi definire anche l'insieme R di coppie antenna-centroide (a, c) tali che a sia un'antenna di riferimento per il centroide c, ed analogamente anche l'insieme R' di coppie macro-centroide (a, c) tali che a sia la macro di riferimento per il centroide c. Possiamo quindi definire anche

$\tilde{R} = R \cup R'$.
Dati R ed R' possiamo definire semplicemente $R(c) = \{a \in A | (a, c) \in R\}$ e $R'(c) = \{a \in A | (a, c) \in R'\}$, quindi anche $\tilde{R}(c) = R(c) \cup R'(c)$.

In generale, utilizzando questi insiemi di antenne al posto degli insiemi $S(a)$, $S(c)$ e S andremo a considerare meno variabili e vincoli, abbassando di conseguenza la complessità computazionale.
Nel caso del modello precedente, decidendo di lavorare con le antenne di riferimento, avremmo delle semplificazioni nei vincoli (2.6), (2.7) e (2.8), che diventerebbero (rispettivamente):

$$
\begin{aligned}
& v_c \leq (\sum_{a \in \tilde{R}(c)} F(SINR_c^a(n)) m_c^a)/D_c) && c \in C \\
& \sum_{c \in \tilde{R}(a)} m_c^a \leq n^a && a \in A \\
& 0 \leq m_c^a \leq B && (a, c) \in \tilde{R}
\end{aligned}
$$

In particolare ciò ci permette di avere meno termini non-lineari nelle sommatorie dei vincoli (2.6), infatti $\tilde{R}(c)$ contiene al più due antenne (un'antenna di riferimento e, se questa dovesse essere una micro, anche una macro di riferimento), mentre $S(c)$ contiene tutte le antenne che possono servire il centroide c.

2.3 Approssimazione lineare del problema

Per quando visto vorremmo riuscire a eliminare i vincoli quadratici dal modello precedente, la strada che seguiremo sarà di formulare un modello lineare che lo approssima.
Per semplicità di trattazione poniamo:

$$r_c^a = N_G + \sum_{a' \in A(c)} \overline{P}_c^{a'} n_{a'} \quad \text{con} \quad \overline{P}_c^{a'} = P_c^{a'}/B$$

questo valore rappresenta l'interferenza totale che subisce il segnale diretto dall'antenna a al centroide c.

Come prima cosa vogliamo calcolare il massimo valore $\rho^a_{c,max}$ che può assumere r^a_c in modo da avere l' intervallo $[N_G, \rho^a_{c,max}]$ in cui varia r^a_c; per trovarlo possiamo risolvere:

$$\rho^a_{c,max} = N_G + \max\{\textstyle\sum_{a' \in A(c)\setminus a} \overline{P}^{a'}_c n_{a'} : (2.9), (2.10), (2.11)\}$$

A questo punto l'idea è di suddividere l'intervallo trovato in k parti caratterizzate da $k+1$ valori: $N_G = \rho^a_{c,0} \leq \rho^a_{c,1} < ...\rho^a_{c,i} < \rho^a_{c,i+1}... < \rho^a_{c,k-1} \leq \rho^a_{c,k} = \rho^a_{c,max}$.
Riserveremo un posto *speciale* agli indici 1 e $k-1$, in quanto vorremmo che i corrispettivi valori rappresentino, rispettivamente, la massima interferenza che si può avere per trasmettere comunque segnale alla massima velocità e la minima interferenza che non permette alcuna trasmissione di segnale.
Seguendo questa idea poniamo:

$$\rho^a_{c,k-1} = \min\left\{P^a_c/\sigma_{\min}, \rho^a_{c,max}\right\}$$

in modo da avere $\rho^a_{c,\max} = \rho^a_{c,k-1}$ se l'interferenza massima permette comunque passaggio di segnale, $\rho^a_{c,\max} > \rho^a_{c,k-1}$ altrimenti.
Analogamente poniamo:

$$\rho^a_{c,1} = \max\left\{P^a_c/\sigma_{\max}, N_G\right\}$$

per avere $\rho^a_{c,0} = \rho^a_{c,1}$ se nemmeno l'interferenza minima permette di trasmettere alla velocità più alta, $N_G < \rho^a_{c,1}$ altrimenti.

Detto ciò possiamo far corrispondere ad ogni $\rho^a_{c,i}$ una certa velocità di trasmissione (per blocco)

$$\beta^a_{c,i} = F(P^a_c/\rho^a_{c,i})$$

appare evidente che, essendo i $\rho^a_{c,i}$ crescenti in i, i $\beta^a_{c,i}$ sono decrescenti (in i) ed inoltre sono tutti soggetti ai vincoli $0 \leq \beta^a_{c,i} \leq \eta_{max}$.

Adesso per scegliere i restanti $\rho^a_{c,i}$ abbiamo due possibilità: la prima basata sull'equipartizione dell'intervallo $[\rho^a_{c,1}, \rho^a_{c,k-1}]$, la seconda invece fa si che venga equipartizionato l'intervallo $[\beta^a_{c,1}, \beta^a_{c,k-1}]$.

Una volta trovati tutti i $\rho^a_{c,i}$ (e di conseguenza anche i $\beta^a_{c,i}$) possiamo definire le variabili binarie $y^a_{c,i}$ con $i \in I = \{2, 3, ..., k-1\}$ per poter rappresentare il massimo livello di interferenza raggiunto, ossia $y^a_{c,i+1} = 1$ se $r^a_c > \rho^a_{c,i}$, in modo tale che l'ultimo $\rho^a_{c,i}$ per il quale la corrispondente $y^a_{c,i} = 1$ sarà un upper bound per l'interferenza, questo si può ottenere con il seguente vincolo

$$r^a_c \leq \rho^a_{c,i} + y^a_{c,i+1}(\rho_{c,\max} - \rho^a_{c,i})$$

possiamo inoltre aggiungere il vincolo

$$y^a_{c,2} \geq y^a_{c,3} \geq ... \geq y^a_{c,k-2} \geq y^a_{c,k-1}$$

Come già visto il vincolo problematico è il vincolo problematico è il (2.5), ed in particolare il valore che vogliamo approssimare è $F(P^a_c/r^a_c)m^a_c$, per questo motivo considereremo un' approssimazione della funzione F costante negli intervalli $[\rho^a_{c,i}, \rho^a_{c,i+1}]$, così la velocità di trasmissione sarà stimata da $\beta^a_{c,i} + \sum_{i \in I}(\beta^a_{c,i} - \beta^a_{c,i-1})y^a_{c,i}$, ma per i vincoli che abbiamo imposto sulle $y^a_{c,i}$, avremo che la velocità di trasmissione (per blocco) è semplicemente stimata da $\beta^i_{c,h}$ dove h è il più grande indice tale che $y^a_{c,h} > 0$.

Vorremmo anche stimare la velocità totale di trasmissione, introduciamo pertanto le variabili $m^a_{c,i}$ con lo scopo di rappresentare la quantità $y^a_{c,i}m^a_c$, a tal fine dobbiamo imporre i vincoli:

$$m^a_{c,i} \geq m^a_c - B(1 - y^a_{c,i}) \qquad (a, c, i) \in T \tag{2.15}$$

$$m^a_{c,i} \geq 0 \qquad (a, c, i) \in T \tag{2.16}$$

dove $T = S \times I$.

Osserviamo che in realtà questi vincoli impongono soltanto che $m^a_{c,i} \geq y_{c,i} \geq y^a_{c,i}m^a_c$, senza fornire una limitazione superiore a queste nuove variabili, ma ciò non è necessario poichè abbiamo la seguente stima per la velocità totale

di trasmissione:

$$v_c \leq \Big(\sum_{a \in S(c)} \big(\beta^a_{c,1} m^a_c + \sum_{i \in I} (\beta^a_{c,i} - \beta^a_{c,i-1}) m^a_{c,i} \big) \Big) / D_c \qquad c \in C \tag{2.17}$$

dove $m^a_{c,i}$ moltiplica la quantità negativa $\beta^a_{c,i} - \beta^a_{c,i-1}$, così se aumentiamo $m^a_{c,i}$ decresceranno i v_c e con essi la funzione obiettivo, pertanto (poichè il nostro è un problema di massimo) il solutore sarà automaticamente portato a far prendere alle $m^a_{c,i}$ il valore più piccolo permesso (ciò mostra anche che il vincolo (2.16) è effettivamente necessario).

Otteniamo quindi il seguente modello MILP:

$$\max \sum_{c \in C} v_c \tag{2.4}$$

$$v_c \leq \Big(\sum_{a \in S(c)} \big(\beta^a_{c,1} m^a_c + \sum_{i \in I} (\beta^a_{c,i} - \beta^a_{c,i-1}) m^a_{c,i} \big) \Big) / D_c \qquad c \in C \tag{2.17}$$

$$N_G + \sum_{a' \in A(c) \setminus \{a\}} \bar{P}^{a'}_c n_{a'} \leq \rho^a_{c,i} + y^a_{c,i+1} (\rho^a_{c,max} - \rho^a_{c,i}) \qquad (a,c,i) \in T \tag{2.18}$$

$$y^a_{c,2} \geq y^a_{c,3} \geq \ldots \geq y^a_{c,k-2} \geq y^a_{c,k-1} \tag{2.19}$$

$$m^a_{c,i} \geq m^a_c - B(1 - y^a_{c,i}) \qquad (a,c,i) \in T \tag{2.15}$$

$$m^a_{c,i} \geq 0 \qquad (a,c,i) \in T \tag{2.16}$$

(2.5) , (2.7) , (2.8) , (2.9) , (2.10) , (2.11)

La soluzione di questo problema è un'approssimazione inferiore della soluzione del problema iniziale, questo perchè il vincolo (2.17) impone che se l'interferenza del segnale trasmesso dall'antenna a al centroide c è compresa tra $\rho^a_{c,k}$ e $\rho^a_{c,k+1}$ allora calcoleremo $F(SINR)$ come se l'interferenza fosse $\rho^a_{c,k+1}$, ossia approssimiamo $F()$ dal basso, e ciò ci fa ottenere un'approssimazione inferiore della funzione obiettivo.

Inoltre anche che i dati in output (x, n, m) dove x è il vettore delle x_i, n il vettore delle n_i ed m quello delle $m_{i,j}$, definiscono una soluzione ammissibile del problema non approssimato con funzione obiettivo maggiore o uguale a

quella calcolata.

Osserviamo che per ottenere un'approssimazione superiore basterà scalare (di uno) l'indice della y nel vincolo (2.18), ossia sostituiamo il precedente vincolo con:

$$N_G + \sum_{a' \in A(c) \setminus \{a\}} \bar{P}_c^{a'} n_{a'} \leq \rho_{c,i}^a + y_{c,i}^a (\rho_{c,\max}^a - \rho_{c,i}^a) \quad (a, c, i) \in T$$

in questo modo otteniamo un'approssimazione superiore del problema, infatti adesso se l'interferenza è compresa tra $\rho_{c,k}^a$ e $\rho_{c,k+1}^a$, calcoleremo $F(SINR)$ come se l'interferenza fosse $\rho_{c,k}^a$ ovvero stimiamo $F()$ dall'alto, e ciò ci fa ottenere una valutazione superiore della funzione obiettivo.
Anche in questo caso risolvendo l'approssimazione del problema otteremo una soluzione (x, n, m) ammissibile per il problema di partenza, questa volta però il valore della funzione obiettivo (del problema non approssimato) calcolata in (x, n, m) fornirà una valutazione inferiore dell'ottimo del problema iniziale.

Osserviamo che, per questo modello, per ottenere la versione semplificata, che si avvale delle antenne di riferimento, è sufficiente considerare l'insieme $\tilde{R}$ al posto dell'insieme S.

Capitolo 3

Approccio Column Generation

In questo capitolo introdurremmo per prima cosa in maniera generale l'idea alla base delle tecniche risolutive basate sulla generazione di colonne(*Column Generation*), un efficiente algoritmo per risolvere problemi di programmazione lineare. L'idea di base è che molti problemi sono troppo grandi per poter considerare esplicitamente tutte le variabili, però, poichè molte variabili non saranno utili in quanto assumeranno il valore 0 nella soluzione ottima, in teoria potrebbe essere sufficiente considerare solo un piccolo sottoinsieme di variabili per risolvere il problema.
Column Genearation ci consente proprio di poter considerare solamente le variabili che, potenzialmente, possono migliorare la funzione obiettivo, ovvero andremo a considerare (nel caso di un problema di minimo) variabili con un costo ridotto negativo.

Il problema da risolvere viene suddiviso in due sotto-problemi: il *Master Problem* ed il *sub-problem*. Il Master Problem è il problema di partenza, dove però consideriamo solamente un piccolo sottoinsieme di variabili. Il sub-problem (anche detto *Constraints separation problem*) è invece un nuovo problema che ci consente di individuare le nuove variabili da aggiungere al master problem.

Si procede come segue: viene risolto il Master Problem e dalla sua soluzione possiamo ricavare i prezzi duali di ogni vincolo del master problem, questa informazione sarà utilizzata nella funzione obiettivo del sub-problem. A questo

punto viene risolto il sub-problem; se presente viene identificata una variabile con costo ridotto negativo e questa viene aggiunta al master problem, che viene nuovamente risolto.

Risolvere nuovamente il master problem genererà un nuovo insieme di variabili duali, ed il processo viene ripetuto finchè sono presenti variabili con costo ridotto negativo. Se il sub-problem restituisce una soluzione priva di costi ridotti negativi si può concludere che la soluzione del master-problem è ottima.

Osserviamo che aggiungere una nuova variabile al primale corrisponde ad aggiungere un nuovo vincolo al duale, infatti in pratica ciò che facciamo è cercare una soluzione primale, se questa è ottima allora tutti i vincoli duali sono soddisfatti (dalla soluzione duale complementare) altrimenti vuol dire che esistono uno o più vincoli che sono violati, aggiungendo le corrispondenti variabili al primale andiamo così a considerare esplicitamente questi vincoli nel duale.

Vediamo ora un esempio generale per capire meglio come funziona il metodo Column Generation. Consideriamo ad esempio un problema primale (P) della seguente forma:

$$\min c^T x \tag{3.1}$$

$$Ax = b \tag{3.2}$$

$$x \geq 0 \tag{3.3}$$

con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e x vettore di dimensione $n \gg m$. Come sappiamo non è restrittivo considerare un primale della forma precedente, in quanto tutti i problemi di programmazione lineare possono essere ricondotti alla suddetta forma, con tecniche standard di modellizzazione.

A questo problema è associato il corrispondente problema duale (D):

$$\max y^T b \tag{3.4}$$

$$y^T A \leq c^T \tag{3.5}$$

Vediamo quindi come procedere per risolvere il problema tramite Column

Generation:

Fase 0: Si comincia esplicitando un sottoinsieme delle colonne della matrice A e la sotto-matrice corrispondente $E \in \mathbb{R}^{m \times q}$ $(q < n)$. In particolare le colonne scelte dovranno essere tali che il problema ottenuto da (P) considerando solo le suddette colonne abbia una soluzione ammissibile e limitata. Chiameremo x_E e c_E rispettivamente il vettore delle variabili ed il vettore dei costri del problema ristretto alle colonne considerate.

Fase 1: Per prima cosa consideriamo il seguente *Master Problem* (MP):

$$\min c_E^T x_E \tag{3.6}$$

$$E x_E = b \tag{3.7}$$

$$x_E \geq 0 \tag{3.8}$$

risolvendo questo problema (ad esempio con il metodo del Simplesso) otteremo una coppia di soluzioni ammissibili e ottime primale-duale x_E^* e y^*. Osserviamo che ciò che stiamo facendo è considerare una partizione $A = [E|H]$ dove E rappresenta i vincoli esplicitati ed H i vincoli "nascosti". Ponendo $x = [x_E^*|0]^T \in \mathbb{R}^n$ si ottine una soluzione ammissibile per il problema (P); inoltre, poichè (P) e (MP) hanno lo stesso numero di vincoli, $y = y^*$ è una soluzione anche per il duale (D) (non necessariamente ammissibile). Infine notiamo che y ed x sono in scarti complementari. Quindi x e y sono ottime (rispettivamente) per (P) e (D) quando y è ammissibile per (D).

Fase 2: A questo punto dobbiamo determinare se esiste un vettore $p \in \mathbb{R}^m$ tale che:

- p rappresenta i coefficienti nei vincoli di una variabile x_i (ovvero p è una colonna A_i di A) di costo c_i;
- $c_i - (y^*)^T p < 0$.

Notiamo che le due condizioni precedenti identificano i vincoli del problema duale iniziale (D) che sono violati dall'attuale soluzione $y = y^*$. Inoltre i vincoli corrispondenti ad x_E saranno certamente rispettati, vista l'ammissibilità di y_E. Questa fase corrisponde alla risoluzione del *sub-problem*.

Fase 3: Per quando detto, se al passo precedente non abbiamo trovato nessun p che soddisfi le due condizioni, allora possiamo fermarci in quanto sia x che y saranno ammissibili (rispettivamente per (P) e (D)) e quindi sono ottime (poichè rispettano la condizione degli scarti complementari). Se invece trovassimo (almeno) un vettore p con le due precedenti caratteristiche, allora dovremmo aggiornare il master problem aggiungendo tutti i vettori trovati nella fase precedente alla matrice E ed i corrispondenti costi c_E e variabili x_E. Fatto ciò torneremo alla *Fase* 1 e continueremo ad iterare fino a che non ci siano più variabili da aggiungere al master problem.

Capitolo 4

Modelli Column Generation "ai 15 secondi"

Considereremo ora due modelli per la risolzione del secondo problema, ovvero ci collochiamo nella situazione di aver già deciso quali antenne sono accese e, lavorando con queste, vogliamo decidere in modo ottimale come far allocare i blocchi ad ogni antenna per minimizzare l'interferenza globale del sistema. Osserviamo che in una tale situazione non c'è bisogno di considerare tutti i centroidi separatamente, in quanto sappiamo già a quale antenna è associato ogni centroide, possiamo quindi considerare per ogni antenna un unico grande centroide avente come domanda la somma delle domande dei centroidi che lo compongono.

4.1 Modello con matrice delle interferenze

In questo modello non considereremo dati precisi, in particolare considereremo, per ogni $(i, j) \in A \times A$, una stima dell'interferenza $\alpha_{i,j}$ percepita dagli utenti di un'antenna i se l'antenna j è accesa; a questo scopo possiamo

considerare la seguente *matrice delle interferenze*:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,N} \\ \alpha_{2,1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{N-1,N} \\ \alpha_{N,1} & \cdots & \alpha_{N,N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che, in generale, $\alpha_{i,j} \neq \alpha_{j,i}$, ovvero la matrice delle interfereze *non* è simmetrica. É lecito considerare questa matrice perchè l'interferenza non dipende da quali blocchi le antenne stiano trasmettendo, ma solo dalla coppia di antenne. Per ogni $i \in A$ consideriamo un peso w_i per rappresentare l'importanza dell'antenna i ed una domanda D_i (in termine di blocchi) che ci aspettiamo che l'antenna i debba servire.

Definiamo quindi i patters binari $p = [p_i]_{i \in A}$ per indicare quali antenne stanno trasmettendo contemporaneamente sullo stesso blocco. Adesso per ogni patter $p \in \mathcal{P}$ definiamo un costo c_p in termini di interferenza (generata dall'utilizzo di un pattern di tipo p) come:

$$c_p = \sum_{i \in A} \sum_{j \in A} w_i \alpha_{i,j} p_i p_j$$

Osserviamo in particolare che avremo $c_p = 0$ nel caso in cui p sia un vettore della base canonica di $\mathbb{R}^{|A|}$; questo è il caso in cui un certo blocco è utilizzato da un'unica antenna.

Il modello può quindi essere formulato come segue:

$$\min \sum_{p \in \mathcal{P}} c_p x_p \tag{4.1}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} p_i x_p = D_i \qquad i \in A \tag{4.2}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} x_p \leq B \tag{4.3}$$

$$x_p \in \mathbb{N} \qquad p \in \mathcal{P} \tag{4.4}$$

Le variabili $x_p \in \mathbb{N}$ che utilizziamo rappresentano il numero di patterns del tipo $p \in \mathcal{P}$ utilizzati, quindi con la funzione obiettivo vogliamo minimizzare l'interferenza globale del sistema. Il vincolo (4.2) garantisce che la domanda di ogni antenna sia soddisfatta, mentre il vincolo (4.3) impone il limite dei blocchi utilizzabili (da ogni antenna).

Per applicare la tecnica di generazione di colonne dobbiamo considerare il rilassamento continuo (dove semplicemente sostituiamo il vincolo $x_p \in \mathbb{N}$ con $x_p \geq 0$) del problema ed in particolare il duale di quest'ultimo, che risulta essere:

$$\max \sum_{i \in A} \lambda_i D_i + \mu B \tag{4.5}$$

$$\sum_{i \in A} p_i \lambda_i + \mu \leq c_p \qquad p \in \mathcal{P} \tag{4.6}$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad i \in A \tag{4.7}$$

$$\mu \leq 0 \tag{4.8}$$

Quindi il sotto-problema di generazione di colonne consiste nel trovare quali tra i vincoli (4.6) non considerati esplicitamente (il corrispettivo pattern non è considerato nel primale) sono violati, per far ciò dobbiamo esplicitare p in c_p, ossia:

$$\sum_{i \in A} p_i \lambda_i - \sum_{i \in A} \sum_{j \in A} w_i \alpha_{i,j} p_i p_j \leq -\mu$$

a questo punto lo scopo del sub-problem è quello di determinare se esistono $p \in \mathcal{P}$ tali che:

$$\lambda^T p - p^T \omega \alpha p > -\mu$$

ovvero

$$p^T \omega \alpha p - \lambda^T p < \mu \quad p \in \mathcal{P}$$

Pertanto possiamo considerare come sub-problem:

$$\min\{p^T \bar{\alpha} p - \lambda^T p \quad : p \in \mathcal{P}\}$$

dove $\bar{\alpha_{i,j}} = \omega_i \alpha_{i,j}$ con $(i,j) \in A \times A$.

Ricordiamo che per applicare il metodo Column-Generation abbiamo bisogno di un insieme di patterns non vuoto per cui il primale abbia una soluzione ammissibile, osserviamo che per questo modello possiamo partire semplicemente dal seguente insieme di patterns:

$$\{(e_1 + e_N), (e_2 + e_N), ..., (e_{N-1} + e_N)\}$$

dove $N =\mid A \mid$ e $e_1, ..., e_N$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^N$.

4.2 Modello con stime precise dell'interferenza

Proponiamo ora un nuovo modello più dettagliato per la coordinazione delle antenne nelle reti 5G che consideri un'approssimazione più precisa dell'interferenza, per la risoluzione del secondo problema. Invece di minimizzare l'interferenza in modo generale con dei vincoli dati in termini di blocchi, prenderemo in considerazione formule dettagliate per la larghezza di banda che ogni blocco fornisce nello scenario di interferenza (atteso) per minimizzare direttamente un'approssimazione del consumo totale di energia.

Come prima consideriamo un insieme A di *antenne* (o *nodi*) ognuna delle quali può trasmettere ovunque in un insieme B di *blocchi*.
Anche per questo modello, come per il precedente, visto che sappiamo già quale utente è servito da quale antenna possiamo senza problemi considerare un unico grande centroide per ogni antenna (accesa).
Nel prossimo lasso temporale (circa 15 secondi), ci si aspetta che una data *domanda* D_a (in Mb/s) sia servita dall'antenna a, data dalla somma delle domande dei centroidi ad essa associati.
Un *unico* valore P^a è utilizzato per stimare la forza del segnale (in un'unità appropriata) che riceveranno gli utenti serviti con l'antenna a, questo valore servirà per calcolare il *rapporto segnale-rumore* e perciò l'effettiva larghezza di banda.
Questo valore può essere pensato come una media ponderata ottenuta con i dati recenti (dei precedenti 15 secondi) considerando dove si trovava l'attuale insieme di utenti e qual'è stata la domanda per ognuno di essi.

Similmente, per ogni coppia (a, a') di antenne il coefficiente numerico $P^a_{a'} \geq 0$ indica la frazione di segnale trasmesso da a' che raggiunge gli utenti assegnati ad a, creando interferenza con il segnale utile trasmesso da a. Anche questo dovrà essere mediato nell'area coperta dall'antenna a (/ per gli utenti assegnati ad a); assumeremmo che questo sia fatto.
Definiamo quindi $\widehat{A}(a) = \{a' \in A : P^a_{a'} > 0\}$ l'insieme delle antenne che quando attive (potenzialmente) interferiscono con a.
Infine, come prima, per ogni antenna a la costante $f_a \geq 0$ indica il costo di trasmissione di un blocco, che verrà assunto uniforme (ma non tra diverse antenne, che possono essere di due tipi differenti: "macro" o "micro").

Consideriamo la matrice di incidenza (variabile) $n = [n^a_b]_{a \in A, b \in B}$ indicanti in quali blocchi ogni antenna può trasmettere.
Il costo energetico totale necessario per inviare i blocchi è pertanto

$$\sum_{a \in A} f_a \sum_{b \in B} n^a_b$$

Questa volta non supporremo che le antenne allochino blocchi in maniera randomica, e non considereremo nemmeno una matrice delle interferenze (precomputata), ma ci baseremo sulla seguente stima del rapporto tra segnale e disturbo avvertito dagli utenti serviti dall'antenna a sul blocco b:

$$SINR^a_b(n) = \frac{P^a n^a_b}{N_G + \sum_{a' \in \widehat{A}(a)} P^a_{a'} n^a_b} \tag{4.9}$$

dove N_G è l'interferenza Gaussiana (assunta costante).
La funzione di trasferimento da $SINR$ a larghezza di banda ha la stessa definizione del modello precedente (2.1). La forma della funzione, ed i suoi parametri, *non* dipendono né dall'antenna né dallo specifico blocco. Definiamo $\alpha = \eta_{\max}/(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$ (> 0) e $\beta = -(\eta_{\max}\sigma_{\min})$ (< 0), così la funzione $F(s)$ può essere descritta da $\alpha s + \beta$.
Una volta definito questo, la larghezza di banda (media) disponibile in a per servire i suoi utenti è:

$$\sum_{b \in B} F(SINR^a_b(n)) n^a_b. \tag{4.10}$$

L'obiettivo del modello è di decidere in modo ottimale quali blocchi ogni antenna può usare, ossia determinare la matrice n in modo da fornire la larghezza di banda richiesta al minimo costo energetico.
É possibile scrivere il modello utilizzando $n = [n_b^a]$ come variabili, però, essendo tutti i blocchi praticamente uguali, questo può comportare un grande numero di simmetrie, e ciò è ben noto essere dannoso per la performance dei metodi risolutivi. Inoltre, il modello dipenderà da $|B|$, che può essere grande.

Proponiamo quindi una formulazione basata sui pattern (*pattern-based*). Per far ciò definiamo l'insieme $\mathcal{P}$ dei *patterns*; ogni $p \in \mathcal{P}$ è un vettore binario $p = [p_a]_{a \in A}$ indicante quali antenne stanno simultaneamente trasmettendo sullo stesso blocco.
A questo punto, in accordo con (4.9) e (2.1) possiamo definire

$$\eta_p^a = p_a \min\{\alpha \frac{P^a}{N_G + \sum_{a' \in \widehat{A}(a)} P_{a'}^a p_{a'}} + \beta, \eta_{\max}\} \tag{4.11}$$

oltre a $f_p = \sum_{a \in A} f^a p_a$.
Il valore η_p^a rappresenta quante larghezze di banda sono richieste (in media) dall'antenna a per trasmettere un blocco ad uno degli utenti da lei serviti, se viene utilizzato il pattern p; f_p invece ci dice qual'è il costo di trasmissione di un blocco se viene utilizzato il pattern $p \in \mathcal{P}$.

Quindi il modello è semplicemente:

$$\min \sum_{p \in \mathcal{P}} f_p y_p \tag{4.12}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \eta_p^a y_p \geq D^a \qquad a \in A \tag{4.13}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} y_p \leq |B| \tag{4.14}$$

$$y_p \in \mathbb{N} \qquad p \in \mathcal{P} \tag{4.15}$$

Analizziamo ora il modello in dettaglio: per prima cosa osserviamo che le variabili $y_p \in \mathbb{N}$ rappresentano il numero di patterns del tipo $p \in \mathcal{P}$ vengono utilizzati. Lo scopo della funzione obiettivo è di minimizzare il costo

complessivo di trasmissione dei blocchi; i vincoli (4.13) assicurano che ogni antenna soddisfi la corrispondente domanda, mentre il vincolo (4.14) impone il limite sul numero di blocchi utilizzabili.

Chiaramente, il problema del nostro modello è il numero di patterns, che precisamente sono $2^{|A|}$. Nonostante ciò, con un piccolo numero di antenne (tipo 10) può essere risolto abbastanza rapidamente.
Per poter riscalare il problema considereremo una tecnica Column Generation (CG); come visto questa tecnica opera su un primale senza variabili intere, quindi dovremo considerare come Master Problem il rilassamento continuo di (4.12)-(4.15) (trasformando 4.15 in $y_p \leq 0$), per poi trovare l'attuale soluzione intera con qualche tecnica (come ad esempio un approccio Branch&Bound o un full Branch&Prince).

Rimarchiamo che la regione ammissibile del rilassamento continuo può essere vuota, e questo è un problema con CG, poiché abbiamo bisogno di un Master-Problem non vuoto per poter generare il duale. La soluzione è abbastanza semplice, si inizia considerando:

$$\min\{\sum_{p\in\mathcal{P}} y_p : (4.13),\ y_p \geq 0,\ p \in \mathcal{P}\} \tag{4.16}$$

che corrisponde alla classica *"fase 0"* dell'approccio.
Se il valore ottimo di (4.16) è più grande di $|B|$ allora (4.13)-(4.15) non ammette soluzione, e probabilmente la soluzione ottima di (4.16) fornisce la miglior scelta pratica possibile.
D'altra parte, appena si ottiene una soluzione ammissibile di (4.16) che soddisfa anche (4.14), si può passare alla "vera" formulazione, essendo sicuri che la regione ammissibile del master problem è non vuota (poiché la soluzione trovata è ammissibile anche per lui).

Un problema è certamente quello di capire come stabilire il prezzo delle nuove colonne. Questo dipende da come scriviamo il duale (del rilassamento

continuo di) (4.13)-(4.15):

$$\max \sum_{a \in A} \lambda^a D^a + \mu |B| \tag{4.17}$$

$$\sum_{a \in A} \lambda^a \eta_p^a + \mu \leq f_p \qquad p \in \mathcal{P} \tag{4.18}$$

$$\lambda^a \geq 0 \ , \ \mu \leq 0 \qquad p \in \mathcal{P} \tag{4.19}$$

Dato un (piccolo) sottoinsieme $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ di patterns e la corrispondente soluzione ottima $(\widehat{\lambda}, \widehat{\mu})$ del Master-Problem, vogliamo vedere se qualche vincolo (sui patterns) in $\mathcal{P} \setminus \mathcal{B}$ è violato.
Questo richiede semplicemente di riscrivere il vincolo (4.18), rendendo sia η_p^a che f_p dipendenti esplicitamente da p, ossia:

$$\sum_{a \in A} p^a (\widehat{\lambda}^a \min\{\alpha \frac{P^a}{N_G + \sum_{a' \in \widehat{A}(a)} P_{a'}^a p^{a'}} + \beta, \eta_{\max}\} - f^a) \leq -\widehat{\mu} \tag{4.20}$$

Notiamo che il caso di (4.16) si ottiene immediatamente ponendo $f_a = 1$ e $\widehat{\mu} = 0$ in (4.20).
Così, il sub-problem CG equivale semplicemente a:

$$\max\{\sum_{a \in A} p_a (\widehat{\lambda}^a \min\{\alpha \frac{P^a}{N_G + \sum_{a' \in \widehat{A}(a)} P_{a'}^a p_{a'}} + \beta, \eta_{\max}\} - f^a) : p \in \{0,1\}^A\}. \tag{4.21}$$

Chiaramente, (4.21) non è un problema semplice; stiamo massimizzando una funzione non-concava, non-liscia sull'ipercubo binario.
Comunque, per $|A|$ fino a circa 20 possiamo ancora enumerare tutti i 2^A patterns p abbastanza velocemente da rendere possibile la separazione.

Per riscalare ulteriormente il problema, con qualche trucco di riformulazione, (4.21) può essere convertito in un QP non-convesso misto-intero,

ovvero:

$$\max \sum_{a \in A} p_a(\widehat{\lambda}^a w_a - f^a) \tag{4.22}$$

$$w_a \leq \eta_{max} p_a \qquad a \in A \tag{4.23}$$

$$z_a = w^a - \beta p_a \qquad a \in A \tag{4.24}$$

$$z_a r_a \leq \alpha P^a p_a \qquad a \in A \tag{4.25}$$

$$r_a = N_G + \sum_{a' \in A(a)} P^a_{a'} p_{a'} \qquad a \in A \tag{4.26}$$

$$p_a \in \{0, 1\} \qquad a \in A \tag{4.27}$$

Questo può essere ulteriormente semplificato usando la natura binaria di p_a; in particolare, (4.22) è equivalente a $\sum_{a \in A} \widehat{\lambda}^a w_a - p_a f^a$ (poiché $p_a w_a = w_a$).

Capitolo 5

Modelli Column Generation "ai 15 minuti"

Vogliamo ora trovare dei modelli che sfruttino l'approccio di generazione di colonne per risolvere il "problema ai 15 minuti". Seguendo idee differenti abbiamo costruito tre modelli che sfruttano tutti la generazione di colonne. In ogni caso per adattare il precedente modello in modo tale che possa determinare in modo ottimale quali antenne accendere e quali spegnere, dovremo introdurre delle nuove variabili binarie $x_a \in \{0, 1\}$ con $a \in A$ per rappresentare lo stato di accensione/spegnimento delle antenne.

Osserviamo che per questi modelli, visto che lavorano su tempi abbastanza lunghi (15 minuti) è più ragionevole considerare $y_p \geq 0$ piuttosto che $y_p \in \mathbb{N}$, in quanto se usiamo un pattern in una quantità frazionaria, ad esempio $3,5$ vorrebbe solo dire che per la prima metà del tempo saranno necessari 4 patterns del tipo $p \in \mathcal{P}$ e per la seconda metà 3. Ciò, oltre che computazionalmente più efficiente è anche più realistico, infatti, in particolare per l'ultimo modello, che considera esplicitamente tutti i centroidi, avremo che anche per utenti con domande piccole verrebbe loro dedicato un intero blocco per tutti i 15 minuti, cosa che potrebbe essere tranquillamente evitata.

Supporre $y_p \in \mathbb{R}^+$ equivale, dal punto di vista concettuale a considerare i pattern p non binari, le due cose non sono però equivalenti dal punto di vista applicativo, osserviamo infatti che considerando $y_p \geq 0$ al posto $y_p \in \mathbb{N}$

stiamo rilassando dei vincoli nel master problem, mentre se consideriamo $0 \leq p \leq 1$ rilassando il vincolo $p \in \{0, 1\}$ ciò che stiamo facendo è considerare un'insieme continuo di patterns, d'altra parte però siamo rilassando dei vincoli di integrità su alcune variabili (cosa che in ogni caso semplifica la complessità del problema) e comunque, sperabilmente, non saranno neccessari molti patterns nemmeno in questo caso.
Possiamo considerare quindi, per ogni modello che presenteremo nel seguito, una variante in cui consideriamo $y_p \geq 0$ ed una in cui consideriamo $0 \leq p \leq 1$.

5.1 Modello con domande variabili

Oltre le nuove variabili, dovremo considerare anche dei vincoli per imporre che se un'antenna è spenta allora questa non potrà inviare segnale (e quindi non potremo usare nessun patter che la contiene), inoltre dovremo modificare i vincoli relativi alle domande delle antenne, in modo tale che se un' antenna è spenta la sua domanda dovrà essere soddisfatta dalle altre antenne.
Per poter dire che se un'antenna è spenta allora non possiamo utilizzare nessun patten che la contiene si possono considerare i vincoli:

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} y_p p_a \leq x_a B$$

infatti così se $x_a = 0$ allora avremo obbligatoriamente $y_p = 0 \ \ \forall p \ \ t.c. \ \ p_a = 1$, se invece $x_a = 1$ questo vincolo non impone alcuna ulteriore condizione sugli y_p in quanto in ognicaso dovremo considerare anche il vincolo $\sum_{p \in \mathcal{P}} y_p \leq B$ che impone il limite sui blocchi utilizzabili.
Per quanto riguarda la domanda delle antenne l'idea seguita in questo modello è di considerare esplicitamente la domanda di ogni antenna in termine dei centroidi da essa serviti, ovvero continueremo a considerare un grande centroide per ogni antenna servendoci dei due insiemi $R(a)$ e $R'(a)$ precendentemente definiti, però avremo che la domanda di questo centroide (che corrisponde alla domanda che ci aspettiamo debba essere servita dall'antenna a) è variabile, in quanto dipende dalla configurazione delle antenne

accese/spente.

Adesso, utilizzando i due insiemi $R(a)$ e $R'(a)$ possiamo definire i valori P_a e $P_{a,a'}$, per indicare, rispettivamente, la potenza (media) del segnale avvertito dagli utenti $c \in \tilde{R}(a)$ e la frazione del segnale dell'antenna a' che arriva agli utenti $c \in \tilde{R}(a)$. Osserviamo che in realtà questi valori ci forniscono una stima corretta solo per le micro, infatti per le macro in realtà stiamo considerando un insieme di centroidi più ampio di quello che potrebbe essere in realtà (in quanto andiamo a considerare), facciamo questa scelta poichè comunque sia non stiamo lavorando su dati certi, ma su medie, quindi questa scelta, presumibilmente, non andrà a comprompottere la validità del modello; abbiamo deciso di considerare quest'approssimazione poichè altrimenti avremmo dovuto introdurre delle ulteriori variabili binarie, nonchè una formulazione lineare dei vincoli sulle domande, e ciò avrebbe fatto aumentare considerevolmente la complessità computazionale del problema. Questi due valori ci permettono di definire la velocità di trasmissione del segnale per gli utenti in $\tilde{R}(a)$ se viene utilizzato un pattern del tipo p:

$$\eta_p^a = p_a \min\{\alpha \frac{P_a}{N_G + \sum_{a' \in A(a)} P_{a'}^a p_{a'}} + \beta, \eta_{max}\}$$

Infine, prima di formulare il modello, introduciamo la funzione $a(c)$ che per ogni centroide $c \in C$ ci dice qual'è la sua antenna di riferimento $a = a(c) \in A$.

Il modello quindi può essere scritto semplicemente come:

$$\min \sum_{a \in A} F_a x_a + \sum_{p \in \mathcal{P}} f_p y_p \tag{5.1}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \eta_p^a y_p \geq D_a \qquad a \in A \tag{5.2}$$

$$D_a = \sum_{c \in R(a)} D_c x_a + \sum_{c \in R'(a)} D_c (1 - x_{a(c)}) \qquad a \in A \tag{5.3}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} y_p p_a \leq x_a B \qquad a \in A \tag{5.4}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} y_p \leq B \tag{5.5}$$

$$y_p \geq 0 \qquad p \in \mathcal{P} \tag{5.6}$$

$$x_a \in \{0, 1\} \qquad a \in A \tag{5.7}$$

Osserviamo che abbiamo aggiunto nella funzione obiettivo i costi di accensione delle antenne e per quanto riguarda i vincoli relativi al soddisfacimento della domanda delle antenne abbiamo approssimato, attraverso i due insiemi $R(a)$ e $R'(a)$ precedentemente introdotti, la domanda che ci aspettiamo debba essere servita dall'antenna a: per le micro avremo che queste, se accese, serviranno la domanda dei centroidi che le hanno come antenne di riferimento; le macro invece oltre la loro domanda dovranno servire anche la domanda dei centroidi che le hanno come "macro di riferimento" se la corrispondente micro è spenta.

Il modello può quindi essere scritto direttamente come:

$$\min \sum_{a \in A} F_a x_a + \sum_{p \in \mathcal{P}} f_p y_p \tag{5.8}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \eta_p^a y_p - \sum_{c \in R(a)} D_c x_a + \sum_{c \in R'(a)} D_c x_{a(c)} \geq \sum_{c \in R'(a)} D_c \qquad a \in A \tag{5.9}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} y_p p_a \leq x_a B \qquad a \in A \tag{5.10}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} y_p \leq B \tag{5.11}$$

$$y_p \geq 0 \qquad p \in \mathcal{P} \tag{5.12}$$

$$x_a \in \{0, 1\} \qquad a \in A \tag{5.13}$$

Osserviamo ora che, nel rilassamento continuo possiamo considerare $y_p \geq 0$ e $x_a \geq 0$, non c'è bisogno di imporre anche $x_a \leq 1$ poichè gli x_a sono in funzione obiettivo ed i due vincoli (5.10) e (5.11) ci assicurano che x_a non superi il valore 1. Pertanto il duale (del rilassamento continuo) è semplicemente:

$$\max \sum_{a \in A} \sum_{c \in R'(a)} \lambda^a D^c + \mu |B| \tag{5.14}$$

$$\sum_{a \in A} \eta_p^a \lambda^a + \mu + \sum_{a \in A} p_a \nu^a \leq f_p \qquad p \in \mathcal{P} \tag{5.15}$$

$$-B\nu^a - \sum_{c \in R(a)} D_c \lambda_a + \sum_{a' \in A \setminus \{a\}} \sum_{c \in R'(a) \cap R(a')} D_c \lambda_{a'} \leq F_a \qquad a \in A \tag{5.16}$$

$$\lambda^a \geq 0 \qquad a \in A \tag{5.17}$$

$$\mu \leq 0 \tag{5.18}$$

$$\nu^a \leq 0 \qquad a \in A \tag{5.19}$$

Quindi, data una soluzione duale $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$, per creare il sotto-problema di generazione di colonne dobbiamo trovare quali tra i vincoli (5.15) sono violati da questa soluzione. Per prima cosa esplicitiamo tutti i valori in funzione di

p ottenendo:

$$\sum_{a\in A}(\bar{\lambda}_a \min\{\alpha\frac{P^a}{N_G+\sum_{a'\in A(a)}P^{a,a'}p^{a'}}+\beta,\eta_{\max}\}+\bar{\nu}_a-f_a)p_a \leq -\mu$$

quindi il sub-problem diventa:

$$\max\{\sum_{a\in A}(\bar{\lambda}_a \min\{\alpha\frac{P^a}{N_G+\sum_{a'\in A(a)}P^{a,a'}p^{a'}}+\beta,\eta_{\max}\}+\bar{\nu}_a-f_a)p_a : p\in\{0,1\}^A\}.$$

e questo può essere riscritto come QP non convesso misto-intero :

$$\begin{aligned}
&\max \textstyle\sum_{a\in A} p_a(\bar{\nu_a}-f^a)+\sum_{a\in A}\bar{\lambda_a}w_a && && (5.20)\\
&\quad w_a \leq \eta_{max}p_a && a\in A && (5.21)\\
&\quad z_a = w_a-\beta p_a && a\in A && (5.22)\\
&\quad z_a r_a \leq \alpha P^a p_a && a\in A && (5.23)\\
&\quad r_a = N_G+\textstyle\sum_{a'\in A(a)}P^a_{a'}p_{a'} && a\in A && (5.24)\\
&\quad p_a\in\{0,1\} && a\in A && (5.25)
\end{aligned}$$

dove nella funzione obiettivo abbiamo usato il fatto che $p_a w_a = w_a$.
Per un numero di antenne abbastanza piccolo possiamo pensare di affrontare il precedente problema per enumerazione, per un numero di antenne più grande questa strada risulta impraticabile, una soluzione può essere però considerare un'approssimazione lineare del modello, simile a quanto fatto per il modello compatto, così da poter semplificare i vincoli non-lineare (5.23).
Ovvero possiamo considerare la seguete discretizzazione del sub-problem:

$$\begin{aligned}
&\max \textstyle\sum_{a\in A} p_a(\bar{\nu_a}-f^a)+\sum_{a\in A}\bar{\lambda_a}w_a\\
&\quad w_a \leq \eta_{max}p_a && a\in A\\
&\quad w_a \leq \beta^a_1+\textstyle\sum_{i\in I}(\beta^a_i-\beta^a_{i-1})y^a_i && a\in A\\
&\quad N_G+\textstyle\sum_{a'\in A(a)}P^a_{a'}p_a \leq \rho^i_a+y^a_{i+1}(\rho^a_{\max}-\rho^a_i) && (a,i)\in A\times I\\
&\quad y^a_2\geq y^a_3\geq\ldots\geq y^a_{k-1} && a\in A\\
&\quad p_a\in\{0,1\} && a\in A
\end{aligned}$$

dove i valori ρ_a^i e β_a^i sono ottenuti in maniera analoga a quanto fatto per ottenere un' approssimazione del modello compatto.

In particolare osserviamo che con quest'approssimazione, poichè stiamo stimando l'interferenza come fosse maggiore di quella effettiva, stiamo stimando la funzione F dal basso, e di conseguenza i valori w_a, rappresentanti la velocità di trasmissione, dal basso; abbiamo scelto un' approssimazione inferiore della velocità di trasmissione poichè così facendo potremmo assicurarci che la soluzione trovata sia ammissibile anche per il problema non linearizzato, infatti se così non fosse rischieremmo che il pattern proposto dal sub-problem non sarebbe utilizzato dal Master problem, che pertanto non cambierebbe la soluzione rispetto alla precedente, quindi si entrerebbe in un loop infinito.

Se invece decidessimo di lavorare con un insieme continuo di patterns (ovvero sostituiamo il vincolo (5.25) con $0 \leq p \leq 1 \quad p \in \mathcal{P}$) possiamo in tal caso considerare un solutore continuo non-lineare che ci consenta, sperabilmente, di trovare un minimo locale in tempi abbastanza brevi.

Rimarchiamo che la regione ammissibile del rilassamento continuo può essere vuota, e questo è un problema con CG, poiché abbiamo bisogno di un Master-Problem non vuoto per poter generare il duale. La soluzione è quasi la stessa del modello precedente, si inizia applicando il metodo di generazione di colonne al problema:

$$\min\{\sum_{p\in\mathcal{P}} y_p : (5.9),\ y_p \geq 0\ p \in \mathcal{P},\ 0 \leq x_a \leq 1\} \tag{5.26}$$

che corrisponde alla classica *"fase 0"* dell'approccio.
Se il valore ottimo di (5.26) è più grande di $|B|$ allora il problema di partenza non ammette soluzione, d'altra parte, appena si ottiene una soluzione ammissibile di (5.26) che soddisfa anche (5.11), si può aggiungere il vincolo (5.10) tra i vincoli del problema e sosituire la funzione obiettivo con uno dei vincoli (5.11).. Se il valore ottimo del nuovo problema è maggiore di 0 allora anche il problema di partenza non ammette soluzione, altrimenti appena si ottiene un valore minore di 0, si può considerare questo vincolo esplicitamente e sostiu-

tire la funzione obiettivo con uno dei vincoli (5.11) non ancora considerato. Una volta aggiunti tutti i vincoli si può passare alla "vera" formulazione, essendo sicuri che la regione ammissibile del master problem è non vuota, poiché la soluzione trovata è ammissibile anche per lui.

5.2 Modello con probabilità di allocazione blocchi

Presenteremo ora un modello che sfrutta ancora una tecnica Column Generation, ma questa volta, considereremo direttamente, per ogni antenna una domanda che ci aspettiamo che questa debba servire, questa domanda la otteniamo sommando le domande dei centroidi che hanno quest'antenna come antenna di riferimento.
Anche in questo modello considereremo al posto dei vari centroidi un'unico grande centroide per antenna avente come domanda la somma delle domande dei centroidi che lo compongono e per la potenza del segnale ricevuto mentre per la potenza del segnale e l'interferenza percepita consideriamo una media dei dati per i centroidi.
In questo caso dobbiamo però introdurre il concetto che il centroide di un'antenna possa essere servito (anche solo in parte) da altre antenne che non siano la sua antenna di riferimento. A questo scopo consideriamo per la potenza del segnale dei valori $P_{a,a'}$ per rappresentare la potenza del segnale ricevuta dal centroide di a se viene servito da a' (dove possiamo avere anche $a = a'$ ed in tal caso $P_{a,a}$ è proprio il valore P_a dei precedenti modelli); per indicare invece la frazione di segnale di a' che raggiunge il centroide associato all'antenna a creando interferenza possiamo considerare dei valori $P_a^{a'}$ (con $a' \in A \setminus \{a\}$) analoghi a quelli dei modelli precedenti.
Possiamo quindi definire i valori $\eta_p^{a,a'}$ per indicare la velocità di trasmissione per gli utenti di a se questi vengono serviti dall'antenna a'

$$\eta_p^{a,a'} = p_{a'} \min\{\alpha \frac{P^{a,a'}}{N_G + \sum_{a'' \in \widehat{A}(a,a')} P_a^{a''} p_{a''}} + \beta, \eta_{\max}\} \tag{5.27}$$

Il modello è il seguente:

$$\min \sum_{p \in \mathcal{P}} f_p y_p + \sum_{a \in A} F_a x_a \tag{5.28}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{a' \in A} k_{a,a'} \eta_p^{a,a'} y_p \geq D_a \qquad a \in A \tag{5.29}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} y_p \leq B \tag{5.30}$$

$$\sum_{p \in P} y_p p_a \leq x_a B \qquad a \in A \tag{5.31}$$

$$y_p \geq 0 \qquad p \in \mathcal{P} \tag{5.32}$$

$$x_a \in \{0, 1\} \qquad a \in A \tag{5.33}$$

Dove i valori $k_{a,a'}$ costituiscono in un certo senso la probabilità che un certo blocco di un'antenna a' sia allocato per servire gli utenti dell'antenna a; è necessario considerare questi valori (se non volessimo introdurre delle nuove variabili che ci possano dire anche per servire quale antenna è allocato un certo blocco, come vedremo nel prossimo modello) perchè senza questi il nostro modello consentirebbe di servire da uno stesso blocco tutti i centroidi che possono ricevere il segnale.
Osserviamo che non è inverosimile considerare una tale probabilità in quanto, poichè stiamo lavorando su un intervallo di tempo abbastanza lungo (15 minuti) un certo blocco potrebbe essere dedicato in parte ad un centroide ed in parte ad altri.
Per calcolare questi valori $k_{a,a'}$ considereremo una probabilità ottenuta considerando, per ogni antenna, il numero di blocchi totali necessari al soddisfacimento della sua domanda in una situazione senza interferenza; calcoleremo quindi come prima cosa i valori $b_{a,a'} = \frac{D_a}{P_{a,a'}}$ corrispondenti al numero di blocchi necessari ad a' per servire interamente la domanda associata ad a , per poi considerare $k_{a,a'} = \frac{b_{a,a'}}{\sum_{a \in A} b_{a,a'}}$.

Come al solito dovremo considerare il duale (del rilassamento continuo)

di questo problema, che può essere scritto come:

$$\max \sum_{a \in A} \lambda^a D^a + \mu |B| \tag{5.34}$$

$$\sum_{a \in A} \sum_{a' \in A} k_{a,a'} \eta_p^{a,a'} \lambda^a + \mu + \sum_{a \in A} p_a \nu^a \leq f_p \qquad p \in \mathcal{P} \tag{5.35}$$

$$-B\nu^a \leq F_a \qquad a \in A \tag{5.36}$$

$$\lambda^a \geq 0 \qquad a \in A \tag{5.37}$$

$$\mu \leq 0 \tag{5.38}$$

$$\nu^a \leq 0 \qquad a \in A \tag{5.39}$$

Dato un (piccolo) sottoinsieme $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ di patterns e la corrispondente soluzione ottima $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$ del Master-Problem, vogliamo vedere se qualche vincolo (sui patterns) in $\mathcal{P} \setminus \mathcal{B}$ è violato.
Questo richiede semplicemente di riscrivere il vincolo (5.35), rendendo sia $\eta_p^{a,a'}$ che f_p, dipendenti esplicitamente da p, ossia:

$$\sum_{a \in A} (\bar{\nu}_a - f^a + \bar{\lambda}^a k_{a,a'} \sum_{a' \in A} p^{a'} \min\{\alpha \frac{P^{a,a'}}{N_G + \sum_{a'' \in A(a,a')} P_{a''}^{a,a'} p^{a''}} + \beta, \eta_{\max}\}) \leq -\bar{\mu} \tag{5.40}$$

Così, il sub-problem CG equivale semplicemente a:

$$\max\{\sum_{a \in A} (\bar{\nu}_a - f^a + \bar{\lambda}^a k_{a,a'} \sum_{a' \in A} p_{a'} \min\{\alpha \frac{P^{a,a'}}{N_G + \sum_{a'' \in A(a,a')} P_{a''}^{a,a'} p_{a''}} + \beta, \eta_{\max}\}) : p \in \{0,1\}^A\}. \tag{5.41}$$

Chiaramente, (5.41) non è un problema semplice; stiamo massimizzando una funzione non-concava, non-liscia sull'ipercubo binario.
Comunque, per $|A|$ fino a circa 20 possiamo ancora enumerare tutti i 2^A patterns p abbastanza velocemente da rendere possibile la separazione.

Potremmo provare a considerare una riformulazione, così (5.41) può essere

convertito in un QP non-convesso misto-intero, ovvero:

$$\max \sum_{a\in A} p_a(-f^a + \bar{\nu}^a) + \sum_{a\in A}\sum_{a'\in A} k_{a,a'}\bar{\lambda}^a w_{a,a'} \tag{5.42}$$

$$w_{a,a'} \leq \eta_{max} p_{a'} \qquad a, a' \in A \tag{5.43}$$

$$z_{a,a'} = w_{a,a'} - \beta p_{a'} \qquad a, a' \in A \tag{5.44}$$

$$z_{a,a'} r_{a,a'} \leq \alpha P^{a,a'} p_{a'} \qquad a, a' \in A \tag{5.45}$$

$$r_{a,a'} = N_G + \sum_{a''\in A(a,a')} P^{a,a'}_{a''} p_{a''} \qquad a, a' \in A \tag{5.46}$$

$$p_a \in \{0, 1\} \qquad a \in A \tag{5.47}$$

Dove abbiamo semplificato la funzione obiettivo sfruttando il fatto che $p^{a'} w^{a,a'} = w^{a,a'}$.
Osseriviamo infine che per trovare un insieme di patterns per i quali si abbia una soluzione primale-ammissibile possiamo procedere come fatto per il precedente modello.

Poichè il sub-problem nell'attuale formulazione ha un costo computazionale troppo elevato, possiamo pensare di modificare il modello avvelendoci di insiemi R ed R' precedentemente definiti, dobbiamo far attenzione solo ad una cosa; infatti rispetto al modello con i centroidi, in questo caso R ed R' contengono coppie antenna-antenna, dove però la seconda antenna, per quanto detto in precedenza, viene considerata come fosse un grande centroide, quindi in particolare avremo che R conterrà tutte e sole le coppie (a, a), mentre l'insieme R' contiene tutte e sole le coppie (a, a') dove a è la macro che interviene per soddisfare la domanda di a' quando questa è spenta.
Così facendo infatti possiamo portare il numero di vincoli nel sub-problem da $4 \mid A \mid^2 + |A|$ a meno di $9 \mid A \mid$, infatti, in tal caso, ogni "grande centroide" associato alle antenne avrà o una sola antenna di riferimento (una macro) oppure due antenne di riferimento (una macro ed una micro); un ragionamento analogo vale anche per il numero di variabili che scenderebbero da $3 \mid A \mid^2$ a $5 \mid A \mid$.

Infatti il sub-problem diventa:

$$
\begin{aligned}
&\max \textstyle\sum_{a\in A} p_a(-f^a + \bar{\nu}^a) + \sum_{a\in A}\sum_{a'\in\tilde{R}(a)} k_{a,a'}\bar{\lambda}^a w_{a,a'} \\
&\quad w_{a,a'} \leq \eta_{max} p_{a'} && (a,a') \in \tilde{R} \\
&\quad z_{a,a'} = w_{a,a'} - \beta p_{a'} && (a,a') \in \tilde{R} \\
&\quad z_{a,a'} r_{a,a'} \leq \alpha P^{a,a'} p_{a'} && (a,a') \in \tilde{R} \\
&\quad r_{a,a'} = N_G + \textstyle\sum_{a''\in A(a,a')} P^{a,a'}_{a''} p_{a''} && (a,a') \in \tilde{R} \\
&\quad p_a \in \{0,1\} && a \in A
\end{aligned}
$$

Notiamo che la struttura dei vincoli del sub-problem è uguale a quella del sub-problem del modello precedente, quindi possiamo pensare anche per questo modello di utilizzare le stesse strategie risolutive proposte per il sub-problem del modello precedente, ossia nel caso di $p \in \{0,1\}$ potremmo pensare di considerare un'approssimazione lineare del problema che ci consenta di eliminare i vincoli quadratici, mentre per patterns $0 \leq p \leq 1$ potremmo usare un solutore continuo non-lineare che ci permetta di trovare un minimo locale in tempi, sperabilmente, brevi.

5.3 Modello con patterns estesi

Presentiamo infine un ultimo modello che sfrutta ancora la tecnica di generazione di colonne, però questa volta considereremo dei patters "estesi" in modo tale da poter sapere non solo in quali blocchi stanno trasmettendo le antenne, ma anche per quale centroide è allocato tale blocco. Introduciamo quindi dei patterns della forma $p = [p_{a,c}]^{c\in C}_{a\in A} \in \mathcal{P}$ tali che $p_{a,c} \in \{0,1\}$ $\forall a \in A, c \in C$ e $\sum_{c\in C} p_{a,c} = 1$ $\forall a \in A$.

Definiamo $f_p = \sum_{a\in A}\sum_{c\in S(a)} p_{a,c} f_a$ il costo di trasmissione dei blocchi corrispondenete all'utilizzo di un patter di tipo p e

$$\eta^{a,c}_p = p_{a,c} \min\{\alpha \frac{P_{a,c}}{N_G + \sum_{a'\in A(c)} P_{a',c} p_{a',c}} + \beta, \eta_{\max}\}$$

la velocità di trasmissione (/ le larghezze di banda disponibili) per un cen-

troide $c \in C$ servito dall'antenna $a \in A$.

Consideriamo quindi il modello:

$$\min \sum_{p \in \mathcal{P}} f_p y_p + \sum_{a \in A} F_a x_a \tag{5.48}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{a \in S(c)} \eta_p^{a,c} y_p \geq D_c \qquad c \in C \tag{5.49}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} y_p \leq B \tag{5.50}$$

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{c \in S(a)} y_p p_{a,c} \leq x_a B \qquad a \in A \tag{5.51}$$

$$y_p \geq 0 \tag{5.52}$$

$$x_a \in \{0, 1\} \tag{5.53}$$

Il duale (del suo rilassamento continuo) è quindi:

$$\max \sum_{c \in C} D_c \lambda_c + B\mu \tag{5.54}$$

$$\sum_{a \in A} \sum_{c \in S(a)} \eta_p^{a,c} \lambda_c + \mu + \sum_{a \in A} \sum_{c \in S(a)} p_{a,c} \nu_a \leq f_p \qquad p \in \mathcal{P} \tag{5.55}$$

$$-B\nu_a \leq F_a \qquad a \in A \tag{5.56}$$

$$\lambda_c \geq 0 \qquad c \in C \tag{5.57}$$

$$\mu \leq 0 \tag{5.58}$$

$$\nu_a \leq 0 \qquad a \in A \tag{5.59}$$

$$\tag{5.60}$$

I vincoli che dobbiamo considerare per il sotto problema di generazione delle colonne sono:

$$\sum_{a \in A} \sum_{c \in S(a)} \eta_p^{a,c} \lambda_c + \mu + \sum_{a \in A} \sum_{c \in S(a)} p_{a,c} \nu_a \leq f_p \quad p \in \mathcal{P}$$

dobbiamo per prima cosa scrivere $\eta_p^{a,c}$ ed f_p in funzione di p, ovvero riscrivi-

amo i vincoli come:

$$\sum_{a\in A}\sum_{c\in S(a)} p_{a,c}\min\{\alpha\frac{P_{a,c}}{N_G+\sum_{a'\in A(c)}P_{a',c}p_{a',c}}+\beta,\eta_{\max}\}\lambda_c+$$

$$+\sum_{a\in A}\sum_{c\in S(a)} p_{a,c}\nu_a-\sum_{a\in A}\sum_{c\in S(a)} f_a p_{a,c}\leq -\mu \quad p\in\mathcal{P}$$

quindi, data $(\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu})$ soluzione del duale, il sub problem è:

$$\max\sum_{a\in A}\sum_{c\in S(a)} p_{a,c}(\min\{\alpha\frac{P_{a,c}}{N_G+\sum_{a'\in A(c)}P_{a',c}p_{a',c}}+\beta,\eta_{\max}\}\bar{\lambda}_c-f_a-\bar{\nu}_a) \tag{5.61}$$

$$\sum_{c\in S(a)} p_{a,c}=1 \qquad a\in A \tag{5.62}$$

$$p_{a,c}\in\{0,1\} \qquad a\in A, c\in S(a) \tag{5.63}$$

che può essere riscritto come

$$\max\sum_{a\in A}\sum_{c\in S(a)} w_{a,c}\bar{\lambda}_c-\sum_{a\in A}\sum_{c\in S(a)} p_{a,c}(f_a+\bar{\nu}_a) \tag{5.64}$$

$$w_{a,c}\leq \eta_{max}p_{a,c} \qquad a\in A,\ c\in S(a) \tag{5.65}$$

$$z_{a,c}=w_{a,c}-\beta p_{a,c} \qquad a\in A,\ c\in S(a) \tag{5.66}$$

$$z_{a,c}r_{a,c}\leq \alpha P_{a,c}p_{a,c} \qquad a\in A, c\in S(a) \tag{5.67}$$

$$r_{a,c}=N_G+\textstyle\sum_{a'\in A(c)}P_{a',c}p_{a,c} \qquad a\in A, c\in S(a) \tag{5.68}$$

$$\sum_{c\in S(a)} p_{a,c}=1 \qquad a\in A \tag{5.69}$$

$$p_{a,c}\in\{0,1\} \qquad a\in A, c\in S(a) \tag{5.70}$$

Anche per questo modello, per trovare un insieme di patterns per i quali si abbia una soluzione primale-ammissibile possiamo procedere in modo analogo a quanto fatto nei due modelli precedenti.
Inoltre, anche in questo caso possiamo considerare la semplificazione del modello che utilizza un numero limitato di antenne avvalendosi delle antenne di

riferimento, per far ciò è sufficiente sostituire gli insiemi $S(a)$ con $\tilde{R}(a)$ e gli insiemi $S(c)$ con gli insiemi $\tilde{R}(c)$. Anche in questo caso il maggior giovamento per una tale scelta si avrebbe nel sub-problem che avrebbe in tal caso al più $11|A|$ vincoli (di cui al più $2 \mid A \mid$ non-lineari) e $7|A|$ variabili, infatti diventerebbe:

$$
\begin{aligned}
\max \sum_{a \in A} \sum_{c \in \tilde{R}(a)} w_{a,c} \bar{\lambda}_c - \sum_{a \in A} \sum_{c \in \tilde{R}(a)} p_{a,c}(f_a + \bar{\nu}_a) & \\
w_{a,c} \leq \eta_{max} p_{a,c} & \qquad (a,c) \in \tilde{R} \\
z_{a,c} = w_{a,c} - \beta p_{a,c} & \qquad (a,c) \in \tilde{R} \\
z_{a,c} r_{a,c} \leq \alpha P_{a,c} p_{a,c} & \qquad (a,c) \in \tilde{R} \\
r_{a,c} = N_G + \textstyle\sum_{a' \in A(c)} P_{a',c} p_{a,c} & \qquad (a,c) \in \tilde{R} \\
\sum_{c \in \tilde{R}(a)} p_{a,c} = 1 & \qquad a \in A \\
p_{a,c} \in \{0,1\} & \qquad (a,c) \in \tilde{R}
\end{aligned}
$$

In particolare abbiamo ridotto il numero dei vincoli non-lineari (5.67). Possiamo quindi pensare di considerare anche per questo modello un'approssimazione lineare del sub-problem, che permetta di linearizzare i vincoli (5.67), nel caso in cui volessimo lavorare con $p \in \{0,1\}$ ed un solutore continuo non-lineare che cerchi un minimo locale per patterns continui $0 \leq p \leq 1$.

Capitolo 6

Sperimentazione

Per la sperimentazione è stato scelto il modello con le domande delle antenne variabili. Per implementare questo modello abbiamo utilizzato IBM ILOG CPLEX Optimization Studio, un toolkit per lo sviluppo e l'implementazione di modelli di ottimizzazione; ci siamo interfacciati con CPLEX attraverso un software scritto in linguaggio C++, che è stato quindi integrato nel software fornitoci dagli ingegneri per generare le istanze. Poichè CPLEX non è in grado di risolvere i problemi con vincoli non-convessi è stato necessario discretizzare il modello del sub-problem, utilizzando delle tecniche simili a quelle presentate per il modello con discretizzazione lineare. Inoltre, poichè i coefficienti dei vincoli (5.48) sono molto piccoli (quasi a precisione di macchina) è stato necessario riscalare questi vincoli, per far ciò è stato sufficiente moltiplicare entrambe le parti per 10^6.

Per trovare una base che ci fornisca una soluzione ammissibile per il master problem la soluzione è stata quella di considerare una fase iniziale in cui vengono generati in successione dei patterns che ci consentano di avere una soluzione ammissibile per il Master Problem, infatti la reale matrice del nostro problema è composta da "poche" righe e molte colonne ($O(\mid A \mid)$ righe e $O(2^{|A|})$ colonne), con l'approccio Column Generation ciò che facciamo è considerare poche colonne alla volta, quindi non è detto che se il nostro "problema ridotto" non ammette soluzione nemmeno il problema nella formulazione reale la abbia.

Per risolvere questo problema partiamo considerando un problema più piccolo avente meno vincoli e come funzione obiettivo uno tra i vincoli non ancora considerati, quindi applichiamo la tecnica di generazione di colonne a questo problema finchè la funzione obiettivo non è abbastanza bassa da rendere il vincolo ammissibile, quindi possiamo considerare esplicitamente questo vincolo e sostituire la funzione obiettivo con uno dei vincoli non ancora esplicitati.
Possiamo continuare in questo modo fino ad ottenere un insieme di patterns che generi una soluzione ammissibile per il Master Problem, se questo non dovesse avvenire possiamo però essere sicuri che il Master Problem sia effettivamente vuoto.

Grazie al software fornitoci dal dipartimento di ingegneria dell'informazione abbiamo testato il modello su alcune istanze, facendo variare l'insieme di patterns di partenza, la costante di discretizzazione K e la domanda per centroide (espressa in Mb/s), in particolare per quest' ultima distingueremo 3 possibilità: una domanda bassa (15-25 Mb/s per centroide), una domanda media (35-45 Mb/s per centroide) ed una domanda elevata (60-75 Mb/s per centroide).

Nelle successive tabelle i dati in input saranno la domanda (per centroide) e la costante di discretizzazione K, quindi riporteremo il risultato ottenuto (Ris.), ovvero il valore delle funzione obiettivo della versione del master problem con le variabili x_a intere ed il suo tempo di risoluzione (T. MPF), inoltre possiamo anche calcolare un lower bound per il valore ottimo del problema dato dalla funzione obiettivo del Master Problem con tutte le variabili continue; ancora calcoleremo il numero di iterazioni (It.) che sono state necessarie ed i tempi massimi e minimi per la risoluzione del Master Problem "continuo" (T. MP) e del Sub Problem (T. SP) nelle varie iterazioni, infine riporteremo il tempo totale impiegato (T. tot.).
I tempi riportati sono tutti espressi in secondi, inoltre dove presenti due valori, questi rappresenteranno il minimo ed il massimo tempo che è stato necessario; analogamente per le iterazioni, se presenti due valori, questi rappresenteranno le iterazioni che sono state eseguite nella fase 0 e le iterazioni eseguite applicando la tecnica Column Generation alla vera formulazione del

problema.

6.1 Sperimentazioni con 3 esagoni

Nei primi esperimenti considereremo degli scenari composti da 3 esagoni, quindi 3 macro e 6 micro per un totale di 9 antenne. Considereremo prima degli scenari composti da 5 utenti per esagono poi da 10 utenti per esagono per vedere quale approccio è più efficiente per determinare le antenne di riferimento. Proveremo quindi anche a cambiare la base di partenza per testare la stabilità dell'algoritmo, infatti teoricamente il valore della soluzione trovata dovrà essere praticamente lo stesso, ciò che dovrebbe cambiare è il numero di iterazioni necessaria e di conseguenza il tempo necessario.

6.1.1 Confronto tra macro-antenne e macro-micro di riferimento

Nei primi esperimenti considereremo degli scenari composti da 3 esagoni, in ognuno dei quali sono presenti 5 centroidi, considereremo come insieme di patterns di partenza i vettori della base canonica, che dovrebbe costituire l'insieme più efficiente in termini di interferenza.
Nella tabella (6.1) presenteremo i risultati ottenuti sulle istanze suddette utilizzando "macro e antenne di riferimento" (ovvero l'antenna di rierimento può essere scelta arbitrariamente sia tra le macro che tra le micro), mentre nella tabella (6.2) i risultati ottenuti sulle stesse istanze utilizzando "macro e micro di riferimento" (ovvero l'antenna di riferimento dev'essere forzatamente una micro).

Domanda	K	Ris.	Lower bound	It.	T. MP	T. SP	T. MPF	T. tot.
15-25	5	175.3	90.8	0	0	0	0.01	0.026
15-25	10	175.3	90.8	0	0	0	0.01	0.021
15-25	20	175.3	90.8	0	0	0	0.01	0.024
35-45	5	343.5	184.5	0	0	0	0.01	0.019
35-45	10	343.5	184.5	0	0	0	0.02	0.026
35-45	20	343.5	184.5	0	0	0	0.04	0.052
60-75	5	578.3	327.1	0	0	0	0.01	0.032
60-75	10	578.3	327.1	0	0	0	0.05	0.036
60-75	20	578.3	327.1	0	0	0	0.03	0.042

Tabella 6.1: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da tre esagoni, ognuno contenente 5 centroidi. Sono state usate macro e antenne di riferimento.

Domanda	K	Ris.	Lower bound	It.	T. MP	T. SP	T. MP Int.	T. tot.
15-25	5	82.4	82.4	0	0	0	0.01	0.024
15-25	10	82.4	82.4	0	0	0	0.01	0.021
15-25	20	82.4	82.4	0	0	0	0.01	0.021
35-45	5	135.2	135.2	0	0	0	0.01	0.020
35-45	10	135.2	135.2	0	0	0	0.01	0.021
35-45	20	135.2	135.2	0	0	0	0.01	0.042
60-75	5	197.8	197.8	0	0	0	0.01	0.020
60-75	10	197.8	197.8	0	0	0	0.01	0.035
60-75	20	197.8	197.8	0	0	0	0.01	0.032

Tabella 6.2: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da tre esagoni, ognuno contenente 5 centroidi. Sono state usate macro e micro di riferimento.

Abbiamo quindi fatto esperimenti analoghi provando ad aumentare il numero di centroidi da 5 a 10 per vedere se in tal caso fosse più conveniente utilizzare antenne-macro di riferimento o macro-micro di riferimento. Nella tabella (6.3) riportiamo i risultati con antenne e macro di riferimento, mentre nella tabella (6.4) riportiamo i risultati con macro e micro di riferimento:

Domanda	K	Ris.	Lower bound	It.	T. MP	T. SP	T. MP Int.	T. tot.
15-25	5	323.74	184.5	0	0	0	0.01	0.038
15-25	10	323.74	184.5	0	0	0	0.02	0.047
15-25	20	323.74	184.5	0	0	0	0.01	0.044
35-45	5	634.41	385.4	0	0	0	0.02	0.028
35-45	10	634.41	385.4	0	0	0	0.01	0.033
35-45	20	634.41	385.4	0	0	0	0.01	0.014
60-75	5	$+\infty$	701.78	1	0	0	0.02	0.039
60-75	10	$+\infty$	701.78	1	0	0	0.03	0.046
60-75	20	$+\infty$	701.78	1	0	0	0.02	0.043

Tabella 6.3: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da tre esagoni, ognuno contenente 10 centroidi. Sono state usate macro e antenne di riferimento.

Domanda	K	Ris.	Lower bound	It.	T. MP	T. SP	T. MP Int.	T. tot.
15-25	5	136.32	136.32	0	0	0	0	0.018
15-25	10	136.32	136.32	0	0	0	0.01	0.027
15-25	20	136.32	136.32	0	0	0	0	0.038
35-45	5	224.8	224.8	0	0	0	0.02	0.024
35-45	10	224.8	224.8	0	0	0	0.01	0.017
35-45	20	224.8	224.8	0	0	0	0.01	0.024
60-75	5	348.22	348.22	1	0	0	0.02	0.022
60-75	10	348.22	348.22	1	0	0	0.03	0.26
60-75	20	348.22	348.22	1	0	0	0.02	0.24

Tabella 6.4: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da tre esagoni, ognuno contenente 10 centroidi. Sono state usate macro e micro di riferimento.

6.1.2 Sperimentazioni con differenti basi di partenza

Visto che nei precedenti algoritmi per le sperimentazioni con le diverse basi di partenza considereremo solamente la variante del modello che consideri macro e micro di riferimento.

Nei prossimi esperimenti effettuati abbiamo provato a vedere come venga influenzato l'algoritmo se viene cambiato l'insieme dei patterns di partenza, per le prime istanze considereremo prima i risultati ottenuti considerando come base di partenza i vettori della base canonica $\{e_1, \cdots, e_{|A|}\}$ e poi considereremo i vettori $\mathcal{B} = \{e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3 + e_4, \cdots, e_{A-2} + e_{A-1} + e_A, e_{A-1} + e_A\}$, che non dovrebbero costituire un buon insieme di partenza in

quanto facciamo trasmettere sugli stessi blocchi delle antenne tra loro vicine. Considereremo ora uno scenario composto da 3 esagoni, quindi un totale di 9 antenne (3 macro e 6 micro), in ogni esagono sono presenti un numero variabile di centroidi, comunque compreso tra 10 e 15.
Nella tabella (6.5) riportiamo i risulati ottenuti considerando come base di partenza la base canonica, mentre nella tabella (6.6) i risultati ottenuti partendo dalla base $\mathcal{B}$ precedentemente definita.

Domanda	K	Ris.	Lower bound	It.	T. MP	T. SP	T. MP Int.	T. tot.
15-25	5	156.2	156.2	0	0	0.01	<0.01	0.016
15-25	10	156.2	156.2	0	0	0.01	0.01	0.020
15-25	20	156.2	156.2	0	0	0.01	<0.01	0.024
35-45	5	262.23	262.23	0	0	0.01	0.02	0.016
35-45	10	262.23	262.23	0	0	0.01	0.01	0.018
35-45	20	262.23	262.23	0	0	0.01	0.01	0.023
60-75	5	441.1	441.1	0	0	0.01	0.02	0.016
60-75	10	441.1	441.1	0	0	0.01	0.03	0.018
60-75	20	441.1	441.1	0	0	0.01	0.02	0.022

Tabella 6.5: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da tre esagoni, ognuno contenente 10-15 centroidi. Sono state usate macro e micro di riferimento e siamo partiti dalla base canonica

Domanda	K	Ris.	Lower bound	It.	T. MP	T. SP	T. MP Int.	T. tot.
15-25	5	156.8	156.8	3 - 5	0.01	0.02	<0.01	0.089
15-25	10	156.2	156.2	3 - 5	0.01	0.02	0.01	0.089
15-25	20	156.2	156.2	2 - 5	0.01	0.04	<0.01	0.121
35-45	5	262.57	262.57	2 - 4	0.01	0.01	0.02	0.049
35-45	10	262.57	262.57	2 - 4	0.01	0.01	0.01	0.067
35-45	20	262.57	262.57	2 - 6	0.01	0.02	0.01	0.16
60-75	5	441.6	441.6	2 - 5	0.01	0.03	0.02	0.11
60-75	10	441.6	441.6	2 - 5	0.01	0.02	0.03	0.119
60-75	20	441.6	441.6	2 - 5	0.01	0.03	0.02	0.23

Tabella 6.6: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da tre esagoni, ognuno contenente 10-15 centroidi. Sono state usate macro e micro di riferimento e siamo partiti dalla base $\mathcal{B}$ precedentemente definita.

In particolare nel caso di questa seconda base nella soluzione non è stato usato alcun vettore della base di partenza.

6.2 Sperimentazioni con 6 esagoni

A questo punto abbiamo aumentato il numero delle antenne per vedere il comportamento del modello, consideriamo quindi 6 esagoni, quindi 6 macro e 12 micro per un totale di 18 antenne. Anche ora considereremo prima 5 e poi 10 centroidi per esagono facendo variare la domanda per centroide e la costante di discretizzazione. In particolare anche in questo caso abbiamo confrontato i due approcci precedentemente introdotti per vedere ed abbiamo testato i modelli su differenti basi di partenza.

6.2.1 Confronto tra macro-antenne e macro-micro di riferimento

Anche ora partiamo da uno scenario con 5 centroidi per esagono. Nella tabella (6.7) riportiamo i risultati ottenuti considerando macro e micro di riferimento, mentre nella tabella (6.8) riportiamo i risultati ottenuti utilizzando macro e antenne di riferimento.

Domanda	K	Ris.	Low. bound	Iter.	T. MP	T. SP	T. MPF	T. tot.
15 - 25	5	151.94	151.94	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.02
15 - 25	10	151.94	151.94	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.027
15 - 25	15	151.94	151.94	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.037
35 - 45	5	261.063	261.063	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.02	0.028
35 - 45	10	261.063	261.063	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.028
35 - 45	15	261.063	261.063	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.038
60 - 75	5	380.34	380.34	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.020
60 - 75	10	380.34	380.34	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.02	0.028
60 - 75	15	380.34	380.34	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.038

Tabella 6.7: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da sei esagoni, ognuno contenente 5 centroidi. Sono state usate macro e micro di riferimento.

Domanda	K	Ris.	Low. bound	Iter.	T. MP	T. SP	T. MPF	T. tot.
15 - 25	5	316.002	163.247	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.02
15 - 25	10	316.002	163.247	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.027
15 - 25	15	316.002	163.247	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.02	0.02	0.03
35 - 45	5	649.231	347.3	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.02	0.020
35 - 45	10	649.231	347.3	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.02	0.01	0.031
35 - 45	15	649.231	347.3	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.02	0.01	0.038
60 - 75	5	$+\infty$	617.68	0 - 2	0 - 0.01	0 - 0.06	0.01	0.27
60 - 75	10	$+\infty$	617.68	0 - 7	0 - 0.01	0 - 0.36	0.02	0.29
60 - 75	15	$+\infty$	617.68	0 - 7	0 - 0.01	0 - 0.43	0.01	0.53

Tabella 6.8: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da sei esagoni, ognuno contenente 5 centroidi. Sono state usate macro e antenne di riferimento.

Portando ora il numero di utenti a 10, riportiamo di seguito nella tabella (6.9) i risulatti ottenuti utilizzando macro e micro di riferimento, mentre nella tabella (6.10) i risultati delle sperimentazioni effettuate con la variante di macro e antenne di riferimento.

Domanda	K	Ris.	Low. bound	Iter.	T. MP	T. SP	T. MPF	T. tot.
15 - 25	5	256.45	256.45	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.023
15 - 25	10	256.45	256.45	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.027
15 - 25	15	256.45	256.45	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.043
35 - 45	5	443.23	443.23	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.02	0.022
35 - 45	10	443.23	443.23	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.06	0.01	0.031
35 - 45	15	443.23	443.23	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.027	0.01	0.038
60 - 75	5	709.16	709.16	0 - 2	0 - 0.01	0 - 0.09	0.01	0.12
60 - 75	10	709.16	709.16	0 - 1	0 - 0.01	0 - 0.53	0.02	0.74
60 - 75	15	709.16	709.16	0 - 1	0 - 0.01	0 - 0.26	0.01	1.43

Tabella 6.9: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da sei esagoni, ognuno contenente 10 centroidi. Sono state usate macro e micro di riferimento.

Domanda	K	Ris.	Low. bound	Iter.	T. MP	T. SP	T. MPF	T. tot.
15 - 25	5	591.70	335.60	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.024
15 - 25	10	591.70	335.60	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.033
15 - 25	15	591.70	335.60	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.01	0.052
35 - 45	5	$+\infty$	735.79	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0.02	0.020
35 - 45	10	$+\infty$	735.79	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.02	0.01	0.028
35 - 45	15	$+\infty$	735.79	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.02	0.01	0.034
60 - 75	5	2621.95	1611.95	0 - 2	0 - 0.01	0 - 0.06	0.01	0.15
60 - 75	10	2621.95	1611.95	0 - 7	0 - 0.01	0 - 0.36	0.02	0.79
60 - 75	15	2621.95	709.16	0 - 7	0 - 0.01	0 - 0.43	0.01	2.03

Tabella 6.10: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da sei esagoni, ognuno contenente 10-15 centroidi. Sono state usate macro e antenne di riferimento.

Notiamo che, analogamente a quanto accaduto anche per 3 esagoni, la variante con macro e micro di riferimento funziona meglio sia per il valore della soluzione che per il lower bound fornito.

6.2.2 Sperimentazioni con differenti basi di partenza

Proviamo a vedere anche per 6 esagoni cosa cambia partendo da un' altra base (considereremo la stessa base utilizzata in precedenza per 3 esagoni), consideriamo anche ora 10-15 utenti per esagono. Visto che usando "macro e antenne" di riferimento i risultati ottenuti sono stati nettamente peggiori dell'altra variante analizziamo solo il caso in cui siano considerate micro e macro di riferimento.
Nella tabella (6.11) riportiamo i risultati delle sperimentazioni svolte partendo dalla base canonica, mentre nella tabella (6.11) riportiamo i risultati delle sperimentazioni svolte utilizzando come base di partenza la base $\mathcal{B}$ precedentemente definita. Con la base canonica abbiamo:

Domanda	K	Ris.	Low. bound	Iter.	T. MP	T. SP	T. MPF	T. Tot
15 - 25	5	282.557	282.557	0 - 0	0.01	0 - 0.01	0.01	0.026
15 -25	10	282.557	282.557	0 - 0	0.01	0 - 0.01	0.01	0.035
15 - 25	20	282.557	282.557	0 - 0	0.01	0 - 0.01	0.01	0.044
35 - 45	5	485.64	485.64	0 - 0	0.01	0-0.01	0.01	0.021
35 - 45	10	485.64	485.64	0 - 0	0.01	0 - 0.04	0.01	0.021
35 - 45	20	485.64	485.64	0 - 0	0.01	0 - 0.05	0.01	0.043
60 - 75	5	832.03	832.03	1 - 3	0.02	0 - 0.02	0.01	0.3
60 - 75	10	832.03	832.03	1 - 3	0.07	0 - 0.05	0.01	0.6
60 - 75	20	832.03	832.03	1 - 5	0.03	0 - 0.32	0.01	0.72

Tabella 6.11: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da sei esagoni, ognuno contenente 10-15 centroidi. Sono state usate macro e micro di riferimento, abbiamo scelto la base canonica come base di partenza.

Domanda	K	Ris.	Low. bound	Iter.	T. MP	T. SP	T. MPF	T. Tot
15 - 25	5	282.56	282.56	9 - 5	0.01	0 - 0.01	0.01	0.12
15 -25	10	282.56	282.56	9 - 5	0.01	0 - 0.01	0.01	0.19
15 - 25	20	282.56	282.56	9 - 8	0.01	0 - 0.04	0.01	0.51
35 - 45	5	486.033	486.033	9 - 5	0.01	0 - 0.05	0.01	0.21
35 - 45	10	486.033	486.033	9 - 6	0.01	0 - 0.02	0.01	0.3
35 - 45	20	486.033	486.033	9 - 6	0.01	0 - 0.07	0.01	0.5
60 - 75	5	832.03	832.03	7 - 8	0.01	0 - 0.07	0.01	0.83
60 - 75	10	832.03	832.03	8 - 9	0.01	0 - 0.17	0.01	1.73
60 - 75	20	832.03	832.03	8 - 9	0.01	0 - 0.24	0.01	2.15

Tabella 6.12: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da sei esagoni, ognuno contenente 10-15 centroidi. Sono state usate macro e micro di riferimento, scegliendo $\mathcal{B}$ come base di partenza.

Osseriviamo che, proprio come ci aspettavamo, anche in questo caso, l'algoritmo non è influenzato dall' utilizzo di una base differente dalla base canonica, se non per il numero delle iterazioni (e di conseguenza per il tempo impiegato).

6.3 Sperimentazioni su molti esagoni

Aumentiamo ora il numero di esagoni per vedere come si comporta il modello all'aumentare delle antenne considerate.
Nella tabella (6.13) riportiamo i risultati ottenuti utilizzando macro e antenne

di riferimento, mentre nella tabella (6.14) riportiamo i risultati ottenuti con la variante delle macro e micro di riferimento :

Ctrd.	K	Esag.	Ris.	Lower bound	It.	T. MP	T. SP	T. MP Int.	T. tot.
5	5	3	578.298	327.067	0 - 0	0 - 0	0 - 0.01	0.01	0.029995
5	10	3	578.298	327.067	0 - 0	0 - 0	0 - 0.01	0.01	0.026375
5	20	3	578.298	327.067	0 - 0	0 - 0	0 - 0	0.02	0.04132
10	5	3	$+\infty$	701.776	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0	0	0.019052
10	10	3	$+\infty$	701.776	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0	0.01	0.024034
10	20	3	$+\infty$	701.776	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0	0.01	0.045038
15	5	3	1843.45	1405.18	0 - 0	0 - 0	0 - 0.02	0.01	0.059396
15	10	3	1843.45	1405.18	0 - 0	0 - 0	0 - 0.02	0.01	0.047859
15	20	3	1843.45	1405.18	0 - 0	0 - 0	0 - 0.02	0.01	0.053777
5	5	6	$+\infty$	617.608	0 - 0	0 - 0	0 - 0.02	0.01	0.037618
5	10	6	$+\infty$	617.608	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0	0.01	0.02728
5	20	6	$+\infty$	617.608	0 - 0	0 - 0	0 - 0.01	0.01	0.036969
10	5	6	$+\infty$	1362.33	1 - 0	0 - 0.01	0 - 0.0.1	0.01	0.372375
10	10	6	2466.92	1362.33	1 - 7	0 - 0.01	0 - 0.05	0.01	0.372375
10	20	6	2438.23	1345.23	1 - 9	0 - 0.01	0 - 0.1	0.01	0.810473
15	5	6	3630.4	2741.35	0 - 3	0 - 0	0 - 0.05	0.01	0.197531
15	10	6	3595.59	2683.83	0 - 6	0 - 0.01	0 - 0.04	0.02	0.31645
15	20	6	3595.59	2683.83	0 - 6	0 - 0.01	0 - 0.06	0.01	0.354778
5	5	9	2010.89	903.188	1 - 1	0 - 0	0 - 0.04	0.02	0.098503
5	10	9	2010.89	903.188	1 - 1	0 - 0.01	0 - 0.09	0.02	0.182067
5	20	9	1990.86	903.188	1 - 2	0 - 0.01	0 - 0.12	0.01	0.328498
10	5	9	$+\infty$	1971.78	2 - 12	0 - 0	0 - 0.06	0.02	0.794103
10	10	9	$+\infty$	1987.49	1 - 13	0 - 0.01	0 - 0.09	0.01	1.08444
10	20	9	$+\infty$	1959.02	1 - 17	0 - 0.01	0 - 0.19	0.02	2.31649
15	5	9	$+\infty$	4167.48	0 - 5	0 - 0	0 - 0.02	0.01	0.283211
15	10	9	5522.61	4167.48	0 - 9	0 - 0	0 - 0.08	0.01	0.493107
15	20	9	5495.28	4101.49	0 - 12	0 - 0	0 - 0.15	0.03	1.23445
5	20	12	2806.89	1235.95	0 - 4	0 - 0.01	0 - 0.34	0.01	1.20249
5	10	12	2806.78	1235.95	0 - 3	0 - 0	0 - 0.23	0.01	0.609319
5	20	12	2806.89	1235.95	0 - 4	0 - 0	0 - 0.34	0.02	1.32179
10	20	12	$+\infty$	2769.99	1 - 23	0 - 0.01	0 - 0.13	0.03	1.15065
10	20	12	$+\infty$	2769.99	1 - 22	0 - 0.01	0 - 0.21	0.03	2.23403
10	20	12	5878.54	2769.99	1 - 24	0 - 0.01	0 - 0.24	0.03	4.47107
15	5	12	7956.86	6424.07	0 - 18	0 - 0.01	0 - 0.07	0.01	0.884807
15	10	12	7941.33	6258.39	0 - 18	0 - 0.01	0 - 0.08	0.07	1.29671
15	20	12	7710.56	6024.94	0 - 21	0 - 0.01	0 - 0.3	0.06	3.39599

Tabella 6.13: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da un numero sempre più grande di esagoni, ogni centroide avrà una domanda di 60-75 Mb/s. Sono state usate macro e antenne di riferimento.

Ctrd.	K	Esag.	Ris.	Lower bound	It.	T. MP	T. SP	T. MP Int.	T. tot.
5	5	3	197.829	197.829	0 - 0	0 - 0	0 - 0	0.01	0.018255
5	10	3	197.829	197.829	0 - 0	0 - 0	0 - 0	0.01	0.020061
5	20	3	197.829	197.829	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0	0.028485
10	5	3	348.229	348.229	0 - 0	0 - 0	0 - 0	0.01	0.019979
10	10	3	348.229	348.229	0 - 0	0 - 0.1	0 - 0.01	0	0.021428
10	20	3	348.229	348.229	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0	0.030218
15	5	3	440.269	440.269	0 - 1	0 - 0.01	0 - 0.01	0	0.068442
15	10	3	440.269	440.269	0 - 1	0 - 0.1	0 - 0.01	0.01	0.101378
15	20	3	440.269	440.269	0 - 1	0 - 0.01	0 - 0.01	0	0.197134
5	5	6	380.344	380.344	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.03	0	0.021096
5	10	6	380.344	380.344	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.10	0	0.028704
5	20	6	380.344	380.344	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.16	0.01	0.049742
10	5	6	671.827	671.827	0 - 2	0 - 0	0 - 0.07	0	0.192534
10	10	6	671.827	671.827	0 - 3	0 - 0.01	0 - 0.12	0	0.430265
10	20	6	671.827	671.827	0 - 3	0 - 0	0 - 0.19	0	0.759356
15	5	6	920.466	900.325	0 - 8	0 - 0	0 - 0.08	0.03	0.576413
15	10	6	865.745	865.745	0 - 12	0 - 0	0 - 0.11	0.01	1.39543
15	20	6	864.806	864.806	0 - 10	0 - 0.01	0 - 0.22	0	2.2676
5	5	9	561.062	561.062	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.01	0	0.036668
5	10	9	561.062	561.062	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.02	0	0.04489
5	20	9	561.062	561.062	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.1	0	0.088654
10	5	9	988.679	988.679	0 - 11	0 - 0.01	0 - 0.1	0	1.20957
10	10	9	988.198	988.198	0 - 13	0 - 0	0 - 0.3	0	3.59268
10	20	9	989.817	989.817	0 - 14	0 - 0	0 - 0.57	0	7.41955
15	5	9	1710.85	1440.76	0 - 18	0 - 0.01	0 - 0.13	0.02	1.76121
15	10	9	1344.57	1344.57	0 - 17	0 - 0.01	0 - 0.26	0	3.40825
15	20	9	1351.08	1351.08	0 - 14	0 - 0.01	0 - 0.72	0.01	7.53685
5	5	12	769.249	769.249	0 - 7	0 - 0.01	0 - 0.32	0.01	1.94633
5	10	12	761.86	761.86	0 - 5	0 - 0	0 - 0.81	0	5.1091
5	20	12	761.656	761.656	0 - 5	0 - 0.01	0 - 1.62	0.01	9.81608
10	5	12	1602.78	1476.3	0 - 16	0 - 0.01	0 - 0.27	0.02	3.2609
10	10	12	1405.52	1405.52	0 - 17	0 - 0.01	0 - 0.49	0.01	7.6785
10	20	12	1409.21	1409.21	0 - 13	0 - 0.01	0 - 1.11	0	12.2046
15	5	12	3167.06	2374.86	0 - 17	0 - 0.01	0 - 0.29	0.03	3.0075
15	10	12	3079.06	2082.12	0 - 26	0 - 0.01	0 - 0.68	0.18	11.111
15	20	12	3104.3	2141.13	0 - 15	0 - 0.01	0 - 1.67	0.13	15.7034
5	5	15	946.374	946.374	0 - 12	0 - 0.01	0 - 0.65	0.01	4.43585
5	10	15	949.625	949.625	0 - 14	0 - 0.01	0 - 1.44	0.01	17.1354
5	20	15	951.221	951.221	0 - 15	0 - 0.01	0 - 2.24	0	35.5795
10	5	15	2024.23	1807.14	0 - 25	0 - 0.01	0 - 0.52	0.09	6.69308
10	10	15	2819.85	1837.89	0 - 18	0 - 0.01	0 - 0.82	0.19	10.727
10	20	15	1812.78	1812.78	0 - 25	0 - 0.01	0 - 1.84	0	31.2564
15	5	15	5484.52	2736.96	0 - 22	0 - 0.01	0 - 0.75	0.23	8.26161
15	10	15	5504.88	2716.08	0 - 18	0 - 0.01	0 - 0.81	0.19	8.82648
15	20	15	5253.88	2628.08	0 - 25	0 - 0.01	0 - 2.19	0.22	35.0278
5	5	18	1138.22	1138.22	0 - 18	0 - 0.01	0 - 1.1	0	11.6978
5	10	18	1138.84	1138.84	0 - 24	0 - 0.01	0 - 3.15	0.01	36.7691
5	20	18	1141.47	1141.47	0 - 26	0 - 0.01	0 - 9.72	0	102.49
10	5	18	2810.44	2369.91	0 - 16	0 - 0.01	0 - 0.47	0.11	6.02441
10	10	18	2155.95	2155.26	1 - 26	0 - 0.01	0 - 0.99	0.01	20.1865
10	20	18	2219.42	2213.15	1 - 23	0 - 0.01	0 - 2.43	0.03	41.2712
15	5	18	3899.18	3660.25	0 - 26	0 - 0.01	0 - 0.59	0.04	7.30947
15	10	18	6427.17	3346.36	0 - 27	0 - 0.01	0 - 1.71	0.21	19.8025
15	20	18	4436.43	3314.2	0 - 31	0 - 0.01	0 - 3.84	0.28	60.6795
5	5	21	1335.04	1335.04	0 - 31	0 - 0.01	0 - 1.47	0	21.0641
5	10	21	1336.73	1336.73	0 - 41	0 - 0.01	0 - 6.39	0	86.486
5	20	21	1337.33	1337.33	0 - 39	0 - 0.01	0 - 48.59	0	275.655
10	5	21	2939	2636.51	0 - 34	0 - 0.01	0 - 0.74	0.15	15.2965
10	10	21	2900.63	2670.34	1 - 22	0 - 0.01	0 - 1.55	0.17	22.9533
10	20	21	2647.04	2634.23	1 - 21	0 - 0.01	0 - 3.58	0.07	51.1552
15	5	21	8502.36	4258.6	0 - 44	0 - 0.01	0 - 0.84	0.23	22.3191
15	10	21	8174.45	3858.57	0 - 27	0 - 0.01	0 - 2.14	0.6	26.9723
15	20	21	8018.63	3963.19	0 - 37	0 - 0.01	0 - 4.7	0.65	93.5927

Tabella 6.14: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da un numero sempre più grande di esagoni, ogni centroide avrà una domanda di 60-75 Mb/s. Sono state usate macro e antenne di riferimento.

Dagli esperimenti fatti appare evidente che sia più conveniete scegliere "micro e macro" di riferimento piuttosto che "antenne e macro" di riferimento, infatti nel primo caso, il solutore, oltre che fornire soluzioni peggiori (ricordiamo che nella funzione obiettivo stiamo cercando di minimizzare l'energia totale del sistema) ci fornisce dei pessimi lower-bound, mentre utilizzando "macro e micro" di riferimento in generale i valori della funzione obiettivo sono molto più bassi rispetto a quelli della precedente variante. Notiamo che anche quest'ultimo inizia a fornire dei lower buond poco significativi se aumentiamo (di tanto) il numero delle antenne, soprattutto se a ciò associamo un'aumento della domanda per centroide (e quindi della complessiva nel sistema).

Visto che la versione con macro e antenne di riferimento generalmente considera poche micro ed in genere se considerate le vengono associate un numero molto basso di centroidi (in genere 1 o al più 2) per cercare una via di mezzo tra i due approcci considereremo ora una terza variante del modello in cui quando viene generata per ogni utente la corrispettiva antenna di riferimento si considera per le micro una potenza di trasmissione maggiore di quella effettiva. Per far ciò considereremo in fase di associazione le potenze di trasmissione delle antenne in scala logaritmica ed aggiungeremo a tutte le micro un fattore costante.

Ci collocheremo anche ora in uno scenario in cui ogni centroide presenta una domanda compresa tra $60 - 75Mb/s$ ed aumenteremo gradualmente il numero di esagoni considerati.
Inoltre visto che nei precedenti esperimenti non sono stati riscontrati differenze considerevoli tra la scelta K=10 e K=20 porremo K=10.
Anche ora considereremo le tre varianti con 5, 10 e 15 centroidi per esagono, i risultati di questa sperimentazione sono riportati nella tabella (6.15).

Ctrd.	Esag.	Ris.	Lower bound	It.	T. MP	T. SP	T. MP Int.	T. tot.
5	3	251.084	177.841	0 - 0	0 - 0	0 - 0.02	0	0.026344
10	3	445.142	301.702	0 - 0	0 - 0	0 - 0	0.03	0.043649
15	3	565.393	380.228	0 - 2	0 - 0	0 - 0.08	0.03	0.250233
5	6	491.024	349.115	0 - 0	0 - 0	0 - 0.01	0	0.038257
10	6	911.113	574.216	0 - 2	0 - 0.01	0 - 0.38	0.01	0.885067
15	6	1250.94	715.562	0 - 7	0 - 0	0 - 0.39	0.01	2.51345
5	9	976.58	519.535	0 - 0	0 - 0.01	0 - 0.02	0.01	0.056417
10	9	1340.75	857.239	0 - 10	0 - 0.01	0 - 0.83	0.02	7.99324
15	9	1611.09	1067.35	0 - 20	0 - 0	0 - 0.99	0.03	14.54
5	12	1012.71	699.878	0 - 8	0 - 0.01	0 - 1.25	0.03	9.18862
10	12	1800.24	1166.73	0 - 29	0 - 0.01	0 - 1.77	0.02	34.3778
15	12	2184.89	1446.72	0 - 43	0 - 0	0 - 1.54	0.03	44.4396
5	15	1255.27	874.511	0 - 14	0 - 0.01	0 - 3.76	0.02	26.5455
10	15	2246.82	1463.56	0 - 50	0 - 0.01	0 - 3.44	0.06	93.774
15	15	2762.66	1847.03	0 - 60	0 - 0.01	0 - 2.64	0.03	100.18
5	18	1580.04	1055.88	0 - 19	0 - 0.01	0 - 4.68	0.07	55.5811
10	18	2728.16	1766.77	0 - 65	0 - 0.01	0 - 5.28	0.12	191.557
15	18	3349.22	2224.38	0 - 88	0 - 0.01	0 - 5.77	0.05	208.965

Tabella 6.15: Risultati della sperimentazione svolta su scenari composti da un numero sempre più grande di esagoni, ogni centroide avrà una domanda di 60-75 Mb/s. Sono state usate macro e antenne di riferimento, con le potenze delle micro maggiori del valore reale, aumentate di 16 in scala logaritmica.

Notiamo che anche per un numero abbastanza grande di esagoni il solutore continua a lavorare abbastanza velocemente, ci siamo fermati a 18 esagoni, poichè per questi scenari anche, utilizzando micro e macro di riferimento, i lower-bound forniti iniziano a diventare poco significativi.

A questo punto proviamo a fissare uno scenario prestabilito ed a far variare il parametro usato per determinare le antenne di riferimento, in modo da capire come varino i risultati al variare di questo paramentro, collochiamoci ad esempio in uno scenario con 10 centroidi per esagono ed una domanda di $60-75Mb/s$ per centroide, i risultati di questa sperimentazione sono riportati nella tabella (6.16) .

Param.	Esag.	Ris.	Low. bound	It.	T. MP	T. SP	T. MP Int.	T. tot.
0	6	$+\infty$	1321.48	0 - 11	0 - 0.01	0 - 0.07	0.01	0.720657
5	6	$+\infty$	1086.74	0 - 8	0 - 0	0 - 0.19	0.02	1.65069
10	6	1282.19	782.937	0 - 7	0 - 0.01	0 - 0.45	0.02	2.69624
15	6	1302.45	699.813	0 - 4	0 - 0	0 - 0.41	0.01	1.36024
20	6	981.547	584.723	0 - 2	0 - 0	0 - 0.31	0.02	0.865912
25	6	445.715	371.799	0 - 3	0 - 0	0 - 0.15	0	0.73191
30	6	445.715	371.799	0 - 3	0 - 0.01	0 - 0.15	0.01	0.759738
35	6	445.715	371.799	0 - 3	0 - 0.01	0 - 0.15	0.01	0.759738
40	6	445.715	371.799	0 - 3	0 - 0	0 - 0.15	0.02	0.743237
45	6	445.715	371.799	0 - 3	0 - 0.01	0 - 0.14	0.01	0.748411
50	6	304.472	304.472	0 - 4	0 - 0	0 - 0.25	0	1.01522

Tabella 6.16: Risultati della sperimentazione svolta su uno scenario composti da 6 esagoni con 10 centroidi ciascuno, ogni centroide avrà una domanda di 60-75 Mb/s. Sono state usate macro e antenne di riferimento, con le potenze delle micro maggiori del valore reale, aumentate di un parametro via via crescente (questo parametro è espresso in scala logaritmica).

Ci siamo fermati ad un valore del parametro pari a 50 poichè per questo valore stiamo considerando solo micro di riferimento. Osserviamo che anche facendo variare questo parametro la scelta più efficiente per questo modello risulta essere utilizzare macro e micro di riferimento.

Per capire come mai utilizzando una variante differente da macro-micro (anche provando ad utilizzare un parametro per permettere di associare un maggior numero di utenti alle micro) il solutore non lavori molto bene (certe volte non riesce a trovare una soluzione intera, da cui i $+\infty$ nelle tabelle (6.10), (6.13) e (6.16)) e produca anche dei lower bound poco significativi abbiamo provato a far stampare le soluzioni prese dal solutore per risolvere il problema continuo e quelle prese imponendo anche il vincolo $x_a \in \{0, 1\}$; è emerso che il solutore in genere considerava valori per le variabili x_a (delle micro utilizzate) generalmente piccoli (in genere vicini a 0.3), con questi valori nel rilassamento continuo del Master Problem alcuni vincoli risultavano poco significativi, inoltre generalmente imponendo $x_a \in \{0, 1\}$ quasi tutte le x_a relative alle micro vengono poste pari a 0 con la conseguenza che molti dei patterns precedentemente generati non sono più utilizzabili.
Invece utilizzando macro e micro di riferimento la maggior parte delle decisioni prese per le variabili x_a sono in $\{0, 1\}$ anche nel rilassamento continuo del Master Problem.

6.4 Confronto con il modello compatto

Confronteremo adesso il nostro modello con il primo modello presentato (l'approssimazione lineare) sulle stesse istanze fissando la costante di discretizzazione a 10, considereremo un numero sempre più grande di esagoni e faremo variare il numero di utenti per esagono, in ogni caso considereremo per ogni centroide una domanda di $60 - 75Mb/s$. Osserviamo intanto che per come sono stati scritti i due problemi hanno due funzioni obiettivo differenti, mentre il modello compatto cerca di massimizzare la percentuale di soddisfazione dei centroidi e possiede un vincolo sul budget energetico, il nuovo modello cerca di minimizzare il costo energetico del sistema.

In realtà però il modello (compatto) implementato nel software fornitoci dal dipartimento di ingegneria dell'informazione considera una variante dello stesso modello in cui la funzione obiettivo è uguale alla nostra (ovvero viene minimizzata la quantità totale di energia utilizzata) e viene imposto un vincolo relativo alla percentuale di soddisfazione desiderata; per portare i due modelli nella forma più simile possibile (visto che i vincoli del nostro problema ci assicurano un soddisfacimento completo della domanda degli utenti) abbiamo utilizzato per il modello compatto una percentuale di soddisfazione della domanda pari ad 1.

Osserviamo che per il modello che sfrutta la generazione di colonne il valore dell'energia è effettivo in quanto il Master Problem di questo modello non è linearizzato, invece per il modello compatto, benchè i valori utilizzati per calcolare l'energia non sono coinvolti nella linearizzazione, per calcolare questo valore è coinvolta il vettore di variabili che esprime i blocchi allocati per ogni antenna, per questo motivo, considerando una linearizzazione che ci fornisca un'approssimazione superiore della velocità di trasmissione allora l'energia trovata è inferiore di quella effettiva (in quanto potrebbero essere stati usati meno blocchi di quelli effettivamente necessari) però in tal caso potrebbe verificarsi che la soluzione trovata non sia ammissibile, mentre considerando una linearizzazione che ci fornisca un' approssimazione inferiore della velocità di trasmissione otteniamo una valutazione superiore del dispendio energetico, ma siamo sicuri che la sua soluzione sia ammissibile anche

per il problema nella formulazione reale.

Poichè siamo interessati ad avere una soluzione ammissibile considereremo (per il modello compatto) la linearizzazione che approssimi la velocità di trasmissione dal basso.

I risultati del confronto dei due modelli è riportato nella tabella (6.17), per semplicità nella tabella indicheremo con "1" il modello compatto e con "2" il nuovo modello proposto; poichè in alcuni casi (per il modello compatto) il solutore termina per time limit prima di aver trovato una soluzione ottima, considereremo per queste situazioni un lower bound fornitoci da Cplex durante la risoluzione (attraverso il rilassamento continuo del problema), se trovata una soluzione ottima questo coinciderà con la soluzione trovata.

Centroidi	Esag.	Lower-Bound 1	Energia 1	Energia 2	Tempo 1	Tempo 2
5	3	82.832	82.832	121.943	0.25	0.02
10	3	137.088	137.088	154.575	1.9	0.02
15	3	216.311	216.311	184.908	7.34	0.08
20	3	292.283	292.283	221.846	15.50	0.14
5	6	165.796	165.796	240.557	0.9	0.03
10	6	289.443	289.443	304.472	14.15	0.98
15	6	446.871	446.871	362.855	291.88	1.06
20	6	580.76	$+\infty$	430.414	600	1.17
5	9	252.25	252.25	358.498	5.52	0.06
10	9	440.995	440.995	453.728	86.29	3.18
15	9	604.1464	1057.618	555.054	600	3.27
20	9	746.2106	$+\infty$	640.504	600	4.19
5	12	342.615	342.615	480.487	3.19	9.21
10	12	610.375	622.645	611.092	600	10.03
15	12	811.7632	7414.99	744.277	600	7.43
20	12	1067.85	$+\infty$	866.883	600	7.44
5	15	431.779	431.779	601.633	9.25	31.52
10	15	743.95	802.975	765.711	600	25.78
15	15	949.117	9433.6	931.368	600	24.65
20	15	1245.4543	$+\infty$	1086.61	600	19.02

Tabella 6.17: Risultati della sperimentazione svolta per confrontare il modello compatto ed il nuovo modello pattern based su uno scenario con centroidi aventi una domanda di $60 - 75Mb/s$ ciascuno. Per il modello pattern-based sono state usate macro e micro di riferimento, costante di discretizzazione pari a 10 (per il sub-problem) e come base di partenza la base canonica. Per il modello compatto è stata usata come costante di discretizzazione 10, inoltre per questo modello visto che in alcuni casi termina per time limit prima ancora di aver trovato la soluzione ottima considereremo per il modello 1 dei lower-bound ottenuti da Cplex durante la risoluzione (attraverso il rilassamento continuo del problema) ovviamente questo coinciderà con la soluzione se trovata una soluzione ottima.

Dal punto di vista teorico, poichè uno dei due modelli considera i centroidi, ma un'allocazione casuale dei blocchi delle antenne, mentre l'altro tiene maggiormente conto dell'allocazione dei blocchi (e di conseguenza dell'interferenza) considerando però delle medie dei valori per i centroidi (consideriamo delle medie per calcolare i valori della potenza P_a che un'antenna a trasmette ai suoi utenti e della frazione di segnale $P_{a,a'}$ che dall'antenna a' arriva agli utenti serviti dall'antenna a generando interferenza), non possiamo dire se

il valore dell'energia di uno dei due modelli debba essere sempre minore di quello calcolato dall'altro.

Infatti per quanto riguarda il primo modello avremo che l'interferenza avvertita da un generico centroide c servito dall'antenna a è data dalla formula:

$$N_G + \sum_{a' \in A(c) \setminus \{a\}} \frac{P_{a',c}}{B} n_{a'}$$

mentre per il secondo modello si ha che l'interferenza degli utenti serviti dall'antenna a se utilizzato un pattern del tipo p è data da:

$$N_G + \sum_{a' \in A \setminus \{a\}} P_{a,a'} p_{a'} = N_G + \sum_{a' \in A \setminus \{a\}} \sum_{c \in \tilde{R(a)}} \frac{P_{a',c}}{\mid \tilde{R}(a) \mid} p_{a'}$$

dove se utilizziamo macro e micro di riferimento avremo che $\tilde{R}(a) = R(a)$ per le micro e $\tilde{R}(a) = R'(a)$ per le macro; questi non sono confrontabili in quanto dipendono da due valori differenti. Infatti da una parte utilizziamo direttamente le potenze del segnale $P_{a',c}$ che un centroide c riceve dall'antenna a' e la variabile $n_{a'}$ indicante il numero di blocchi utilizzati dall'antenna a' considerando un'allocazione randomica dei blocchi, d'altra parte invece consideriamo per i valori $P_{a,a'}$ una media, ma abbiamo per ogni pattern una differente interferenza, e ciò viene poi usato nel vincolo (5.9) relativo alla soddisfazione delle domande.

Ciò che si guadagna da una parte si perde però dall'altra in quanto per il secondo modello abbiamo che nel vincolo (5.9) viene considerata tutta la domanda associata ad un'antenna a, mentre per il primo modello consideriamo esplicitamente un vincolo relativo alla domanda per ogni centroide, ovvero:

$$\Big(\sum_{a \in S(c)} \big(\beta^a_{c,1} m^a_c + \sum_{i \in I} (\beta^a_{c,i} - \beta^a_{c,i-1}) m^a_{c,i} \big) \Big) \geq D_c \;\; c \in C$$

Infatti il modello compatto è dipendente dal numero di centroidi considerati (e questo è visibile anche nelle sperimentazioni), ciò di per se ci consente di ottenere un'approssimazione più precisa del problema reale ed inoltre così facendo è il solutore stesso a scegliere in modo ottimale da quale antenna

far servire ogni centroide, questo va però a discapito del tempo impiegato; notiamo in particolare che se presenti molte antenne e/o molti centroidi, il modello compatto termina per time limit (che abbiamo impostato a 10 minuti, visto che il problema che stiamo risolvendo dev'essere risolto in 15 minuti).

Osserviamo però che per tutti gli scenari con 5-10 centroidi il modello 1, nei casi in cui riesca a trovare una soluzione ottima, ovvero non sia stato interrotto per time limit, ha un valore della funzione obiettivo inferiore a quello del modello 2, inoltre anche nei casi in cui sia stato interrotto almeno il lower-bound trovato è inferiore all'energia calcolata dal secondo modello; invece con 15-20 centroidi anche il lower-bound del primo modello risulta essere superiore rispetto al valore energetico calcolato dal nuovo modello. Questo conferma che i valori energetici calcolati non sono effettivamente confrontabili in quanto calcolano l'energia in due modi differenti.

Bibliografia

[1] Matteo Cacciola, Antonio Frangioni. Modelli matematici per l'ottimizzazione del consumo energetico in reti 5G. Tesi triennale, *Università di Pisa*, 2016.

[2] Emanuele Guerrazzi, Laura Galli, Giovanni Stea. Models and Algorithms for Antenna Coordination. Tesi magistrale, *Università di Pisa*, 2016.

[JNCA18] G. Nardini, G. Stea, A. Virdis, A. Frangioni, L. Galli, D. Sabella. Practical Feasibility, Scalability and Effectiveness of Coordinated Scheduling Algorithms in Cellular Networks Towards 5G. *Journal of Network and Computer Applications*: 106, 2018.

[CLEEN17] G. Nardini, G. Stea, A. Virdis, A. Frangioni, L. Galli, D. Sabella, G. Dell'Aera. Scalability and Energy Efficiency of Coordinated Scheduling in Cellular Networks Towards 5G. *Fifth International Workshop on Cloud Technologies and Energy Efficiency in Mobile Communication Networks*, 2017.

[CLEEN18] G. Nardini, A. Virdis, N. Iardella, A. Frangioni, L. Galli, G. Stea. Minimizing Power Consumption in Virtualized Cellular Networks. *Sixth International Workshop on Cloud Technologies and Energy Efficiency in Mobile Communication Networks*, 2018.