Capitolo 2

Descrizione del modello matematico

In questo capitolo svilupperemo un modello matematico per il problema di minimizzazione dei costi di trasporto. Questi costi rappresentano un fattore importante nelle operazioni forestali in quanto, giorno dopo giorno, il legname è trasportato dalle origini, ossia i punti di taglio nelle foreste, alle destinazioni, quali impianti per la produzione di carta, segherie o anche stazioni ferroviarie e porti per le esportazioni.

Il problema si articola in due parti in qualche modo distinte: la prima (modello per la programmazione dei viaggi) riguarda la decisione di quali viaggi debbano essere effettuati, ossia da quale delle possibili origini debba provenire il legno che soddisfa la richiesta di una data destinazione. La seconda (modello di schedulazione) riguarda la decisione di quali camion saranno utilizzati per compiere tali viaggi. Le due parti del modello riguardano due aspetti largamente distinti del problema : il primo è quello di garantire la soddisfazione della domanda di legname alle destinazioni; il secondo è quello di utilizzare in maniera ottimale i camion in modo da compiere i viaggi necessari con il minor numero di camion e minimizzando i costi di viaggio a “vuoto” (dalle destinazioni ai punti di carico).

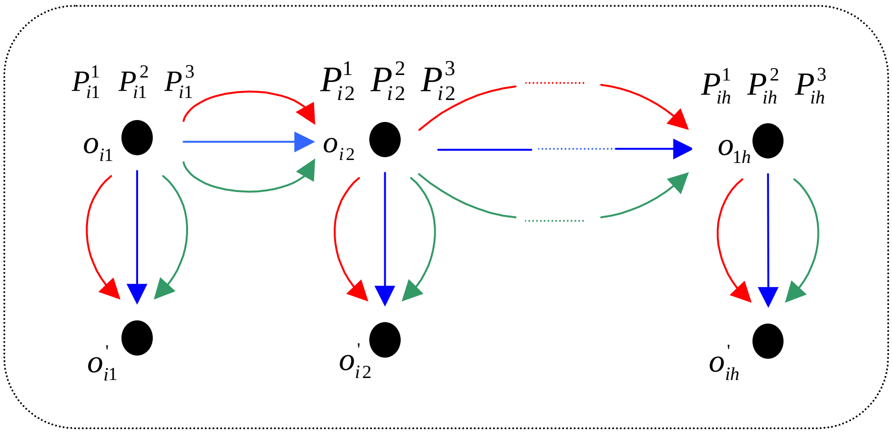
Data la complessità del modello e il gran numero di variabili decisionali e vincoli, per semplificare l’esposizione svilupperemo prima due sottomodelli per le due parti distinte del problema, e poi li uniremo in un unico modello “monolitico”. Questa divisione ci sarà utile anche in seguito, in quanto gli algoritmi che useremo per determinare una soluzione del problema saranno basati su tecniche di decomposizione: verranno cioè sviluppate strategie che permettono di ricavare soluzioni del problema “monolitico” risolvendo separatamente i due sottomodelli.

2.1. Modello di trasporto

In questa fase lo scopo è quello di determinare quali viaggi devono essere fatti tenendo conto di vari fattori: i tempi necessari per raggiungere le località destinazione, la necessità di soddisfare la domanda per ogni prodotto, una efficiente gestione dei lavori di scarico (quindi gli arrivi nelle varie destinazioni devono essere uniformemente distribuiti) , le distanze e i conseguenti costi di viaggio. Il modello del problema che costruiremo sarà un problema di flusso multicommodity di costo minimo a variabili 0/1. La rete di flusso sarà un opportuno "grafo spazio-tempo" che definiremo nel seguito.

Schematizziamo il problema considerando *I* origini, *J* destinazioni e *K* prodotti. Data la continuità delle operazioni, per modellare il fattore tempo dividiamo ogni origine e ogni destinazione in periodi di tempo lunghi Δ_i e Γ_j rispettivamente, dove Δ_i è il tempo medio necessario per il caricamento all'origine *i* , e Γ_j è il tempo medio necessario per lo scaricamento alla destinazione *j*.

Quindi in ogni origine la giornata è suddivisa in periodi temporali $\{t_0,\ldots, t_{Hi}\}$ di lunghezza Δ_i. Sia inoltre P_{ih}^{k} la quantità di prodotto di tipo *k* prodotto all'origine *i* nel periodo *h* (t_{h-1}, t_h). Possiamo rappresentare ogni origine tramite un sottografo; nella Fig.2.1 viene mostrato un esempio con K=3.



: *commodity k = 1;*

: *commodity k = 2;*

: *commodity k = 3.*

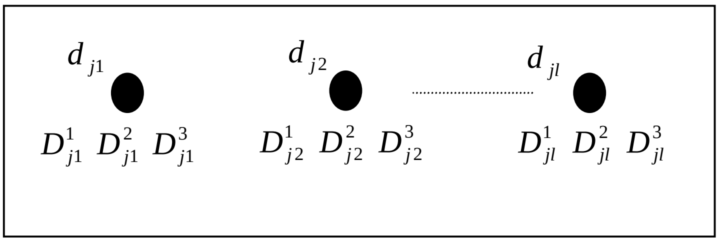
[Fig.2.1: Rappresentazione di una generica origine]

Il nodo o_{ih} rappresenta l'origine *i* nell'intervallo di tempo *h* lungo esattamente Δ_i. Per ogni periodo *h* ogni P_{ih}^{k} rappresenta il deficit del nodo o_{ih} per la commodity *k*.

Gli archi (o_{ih},o'_{ih}) rappresentano il processo di caricamento dall'origine i nel periodo h: la somma del flusso su questi archi deve essere minore o uguale a 1, in quanto l'intervallo di tempo Δ_i è esattamente quello che serve per caricare un camion.

I prodotti che non sono consegnati immediatamente, ossia che non percorrono l'arco (o_{ih},o'_{ih}), vengono immagazzinati per una successiva consegna nell'arco della giornata oppure per un eventuale trasporto nel giorno successivo. Gli archi (o_{ih},$o_{i(h+1)}$) rappresentano proprio il prodotto residuo (non caricato) all'origine *i* nel tempo *h* che è quindi reso disponibile per il caricamento all'istante successivo.

Per quanto riguarda la capacità di scaricamento, questa non è direttamente modellizzata attraverso variabili decisionali in quanto se ne tiene conto durante la costruzione del grafo infatti, ogni destinazione è rappresentata tramite un sottografo; in Fig.2.2 ne viene mostrato un esempio.



[Fig.2.2: Rappresentazione di una destinazione]

Le domande D^k_{jl} ai nodi, riflettono la capacità di scaricamento delle attrezzature disponibili alla destinazione considerata: se, ad esempio, ci fosse una sola attrezzatura avente tempo medio di scaricamento γ_i , allora l'intervallo Γ_i sarebbe esattamente γ_i ed ogni nodo avrebbe domanda unitaria. Nel caso di più attrezzature con diverse velocità di scaricamento la struttura delle domande è ovviamente più complessa. Come vedremo nel Capitolo 4, i dati in input nel modello (domande ed offerte ai nodi, costi e capacità degli archi, struttura topologica del grafo) provengono da elaborazioni abbastanza complesse di dati grezzi raccolti sul "campo", quali ad esempio la capacità di carico e la produzione in m^3, o anche il tempo medio di caricamento, di scaricamento, etc. Resta da vedere come si possono collegare nodi origine e nodi destinazione. Sia $\tau_{i,j}$ la durata del viaggio tra il nodo origine o_i e il nodo destinazione d_j: dato il nodo o'_{ih} e il nodo d_{jl} , l'arco che li congiunge esiste solo se il viaggio è ammissibile.

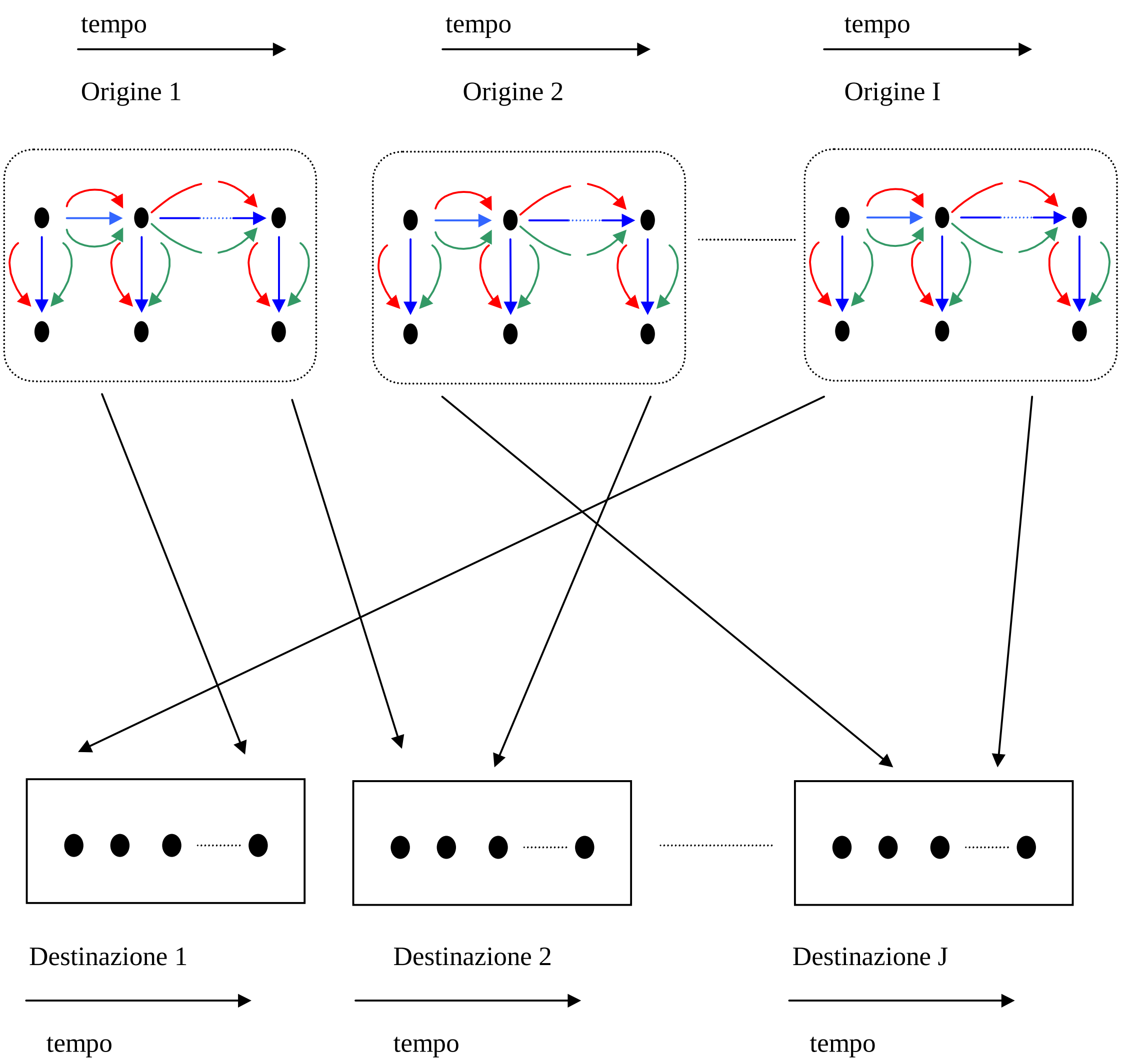
Le condizioni di ammissibilità sono le seguenti:

- orario di partenza dal nodo o'_{ih} (t_h) + tempo di viaggio carico ($\tau_{i,j}$) ≤ orario di arrivo a destinazione (t_l);

La differenza $t_l – t_h – \tau_{i,j}$ corrisponde al tempo di attesa del camion al nodo d_{jl} prima di essere scaricato. La seconda condizione di ammissibilità riguarda proprio il tempo di attesa.

- tempo di attesa a destinazione ≤ prefissato parametro di tolleranza (φ).

In Fig.2.3 è schematicamente rappresentato il grafo corrispondente all'intero problema.



[Fig.2.3 : Rappresentazione completa del problema]

Possiamo scrivere un modello analitico del problema sotto forma di problema di programmazione lineare intera: per fare ciò riepiloghiamo brevemente i parametri che utilizzeremo :

- P_{ih}^{k} : produzione di prodotto k all'origine i nel periodo h [numero di camion] ;
- D_{jl}^{k} : domanda di prodotto k alla destinazione j nel periodo l [numero di camion] ;
- y_{i0}^{k} : stock di prodotto k presente all'origine i all'inizio della giornata [numero di camion] ;
- $\tau_{i,j}$: tempo necessario per il viaggio tra l'origine i e la destinazione j [hr.] ;
- φ : massimo tempo di attesa consentito nelle destinazioni [hr.];
- CT_r : costo orario per un camion di tipo r quando viaggia carico [\$/hr.] ;
- CQ_r : costo orario per un camion di tipo r quando attende per essere scaricato [\$/hr.] ;

- K: numero di prodotti ;
- I : numero di origini ;
- J : numero di destinazioni;
- L_j : numero di intervalli di tempo nella destinazione j;
- H_i: numero di intervalli di tempo all'origine i.

Nel modello che presenteremo saranno inoltre usate le seguenti variabili :

- y_{ihjl}^k : camion carichi di prodotto k trasportati dall'origine i nel periodo h alla destinazione j nel periodo l;
- y_{ih}^k : camion caricati all'origine i nel periodo h;
- $y_{ih(h+1)}^k$: quantità di legno di tipo k, espressa in numero di camion, disponibile all'origine i nell'intervallo h che non viene caricata (e quindi resa disponibile nell'intervallo $h+1$).

Distinguiamo i vincoli del problema in:

a)Vincoli di capacità

Il totale dei camion caricati in un periodo è limitato dalla capacità di caricamento all'origine:

$$\sum_{k=1}^{K} y_{ih}^k \leq 1 \ \forall i, h$$

(per ogni istante h e per ogni origine i, al più un camion può essere caricato, indipendentemente dal prodotto trasportato). Per quanto riguarda le destinazioni la capacità dei nodi è definita implicitamente dalla domanda per ogni prodotto.

b) Vincoli di flusso

- Alle origini :

$$y_{ih}^k - y_{i(h-1)h}^k + y_{ih(h+1)}^k = P_{ih}^k \quad \forall i, h, k$$

Ciò significa che il prodotto k caricato in (i,h) più quello mandato al periodo h+1 è uguale alla produzione in (i,h) più quello che arriva da h-1.

Il vincolo successivo esprime il fatto che tutto ciò che viene trasportato dall'origine i al tempo h in tutte le possibili destinazioni è esattamente il numero di camion caricati in quell'istante, da quella origine.

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{l=1}^{L_j} y_{ihjl}^k - y_{ih}^k = 0 \quad \forall i, h, k$$

- Alle destinazioni :

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{h=1}^{H_i} y_{ihjl}^{k} = D_{jl}^{k} \quad \forall j,l,k$$

Sommando la quantità di prodotto k che in tutte le origini e in tutti gli intervalli di tempo viene caricato sui camion per essere consegnato alla specifica destinazione j al tempo l, abbiamo che questa quantità deve corrispondere esattamente alla domanda di quel tipo di prodotto fatta in quella destinazione in quel periodo.

Infine, per consentire il bilanciamento del flusso nel caso in cui non venga richiesto dalle destinazioni tutto ciò che le origini offrono, è stato introdotto il vincolo seguente:

$$\sum_{i=1}^{I} y_{iH_i} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{h=1}^{H_i} P_{ih}^{k} - \sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{L_j} D_{jl}^{k} \qquad \forall k$$

dove y_{iH_i} è la variabile associata all'arco che collega l'ultimo intervallo di ogni origine con un nodo fittizio che "domanda" la quantità di prodotto k non richiesta dalle destinazioni.

Ricordiamo inoltre che deve essere :

$$y_{ih(h+1)}^{k} \geq 0;\; y_{ih}^{k} \in \{0,1\};\; y_{ihjl}^{k} \geq 0$$

La funzione obiettivo è la seguente :

$$min\ z = \sum_{i,h,j,l,k} CTQ_{ihjl}^{k}\, y_{ihjl}^{k}$$

dove $CTQ_{ihjl}^{k} = [CT_{r(k)}\tau_{ij} + CQ_{r(k)}(t_l - t_h - \tau_{ij})]$

Vogliamo, cioè, minimizzare il totale dei costi tenendo conto sia dei costi di viaggio sia dei costi relativi ai periodi di attesa alle destinazioni.

Riepilogando il modello per la programmazione dei viaggi è il seguente :

$$min\ z = \sum_{i,h,j,l,k} CTQ_{ihjl}^{k}\, y_{ihjl}^{k}$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_{ih}^{k} \leq 1 \ \forall i,h$$

$$y_{ih}^{k} - y_{i(h-1)h}^{k} + y_{ih(h+1)}^{k} = P_{ih}^{k} \quad \forall i,h,k$$

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{h=1}^{H_i} y_{ihjl}^{k} = D_{jl}^{k} \quad \forall j,l,k$$

$$\sum_{i=1}^{I} y_{iH_i} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{h=1}^{H_i} P_{ih}^{k} - \sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{L_j} D_{jl}^{k} \quad \forall k$$

$$y_{ih(h+1)}^{k} \geq 0;\ y_{ih}^{k} \in \{0,1\};\ y_{ihjl}^{k} \geq 0$$

2.2 Modello di schedulazione dei camion

Una volta decisi i viaggi da compiere è necessario determinare un assegnamento ottimale dei camion disponibili ai viaggi. I costi da considerare in questa fase sono: il costo dei viaggi a «vuoto», cioè il costo che si sostiene per un viaggio fatto da un camion che parte da una destinazione e deve arrivare alla successiva origine per essere caricato nuovamente; il costo del viaggio dal deposito alle varie origini; il costo del viaggio dalle destinazioni al deposito; il costo che si sostiene mentre un camion attende prima di essere nuovamente caricato ed infine il costo di inserimento di un camion nel sistema. Infatti, poiché un camion può compiere più di un viaggio nell'arco della giornata lavorativa, il numero di camion da utilizzare non è fissato e può essere determinato in maniera ottimale dal modello. Se il costo fisso (ad esempio, il costo di noleggio di un camion per sopperire all'insufficienza della flotta disponibile) è alto, allora ottimizzare la sequenza dei viaggi in modo da compiere i viaggi richiesti con pochi camion può condurre a forti risparmi. In questo modello, supponiamo quindi di avere già assegnati un certo insieme di viaggi $V = \{v_1,\ldots,v_p\}$ dove ogni viaggio v_z è definito dai seguenti parametri :

- o_z: origine;
- h_z: periodo di partenza;
- d_z: destinazione;
- l_z : periodo di arrivo;
- k_z: tipo di prodotto trasportato;
- r_z: unico tipo di camion che può trasportare il prodotto k_z.

Possiamo formulare il problema come problema di flusso di costo minimo nel seguente modo. La rete di flusso sarà un grafo bipartito dove i nodi corrispondenti rappresentano rispettivamente l'origine e la destinazione di ogni viaggio carico che debba essere fatto. Inoltre, supponendo R il numero dei diversi tipi di camion a disposizione, nella rete sono presenti anche R coppie (una coppia per ogni tipo di camion) di nodi «speciali», che rappresentano i depositi dai quali i camion di un certo tipo escono per compiere il primo viaggio della giornata e rientrano al termine dell'ultimo viaggio. Formalmente la rete è un grafo bipartito $G = (S, E, A \cup A')$ dove $S \cup E$ è l'insieme dei nodi ($S=\{s_1, .., s_p\}$, $E=\{e_1,..,e_p\}$); mentre $A \cup A'$ è l'insieme degli archi. In particolare:

- $A \in S x E$ è costituito dagli archi $(s_z,e_u) \in A$ che rappresentano coppie di viaggi (z,u) compatibili. L'arco che collega il nodo s_z, cioè la destinazione del viaggio z, con il nodo e_u, cioè l'origine del viaggio u, esiste solo se sono verificate determinate condizioni di ammissibilità specificate nel seguito.
- A' è l'insieme di archi $\{(s_i,e_{0r(z)}) : i \in V(r); r = 0,\ldots,R\} \cup \{(s_{0r(z)}, e_j) : j \in V(r); r = 0,\ldots,R\} \cup \{(s_{0r(z)}, e_{0r(z)}) : r = 0,\ldots,R\}$, dove $V(r)$ è l'insieme dei viaggi associati al camion r. In particolare l'arco $(s_{0r(z)}, e_u)$ indica che un camion di tipo r è uscito dal deposito per fare il viaggio u; mentre l'arco $(s_z,e_{0r(z)})$ indica che l'ultimo viaggio del camion di tipo r prima di tornare al deposito è il viaggio z; tali archi hanno capacità 1. Il numero di camion che esce dal deposito deve essere uguale al numero di camion che vi torna: questa quantità non è altro che il flusso sull'arco $(s_{0r(z)}, e_{0r(z)})$; di conseguenza, la capacità di questo arco sarà pari alla consistenza della flotta (numero di camion di tipo r disponibili), mentre il costo sarà pari al costo di inserimento di un camion nel sistema.

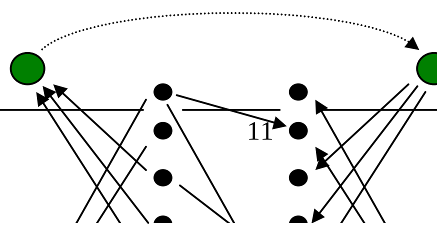
Per quanto riguarda la compatibilità sugli archi in A, sia δ_{zu} la durata del viaggio del camion scarico tra la destinazione del viaggio z e l'origine del viaggio: (z,u) è una coppia di viaggi compatibili se :

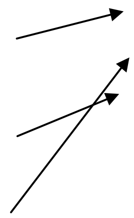
(i) orario di terminazione del viaggio z (l_z) + tempo di viaggio scarico (δ_{zu}) ≤ orario di inizio del viaggio u (h_u).

(ii) tempo di attesa alla nuova origine ($h_u - l_z - \delta_{zu}$) ≤ Prefissato parametro di tolleranza ($\varepsilon \geq 0$).

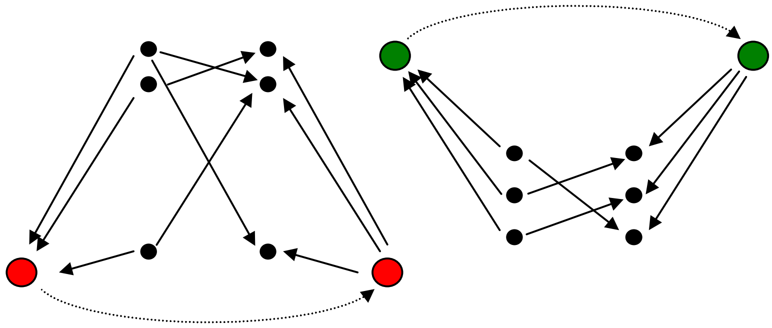
(iii) il camion che compie il viaggio z è in grado di trasportare il prodotto relativo al viaggio u.

La capacità superiore associata ad un arco in A è 1 mentre il suo costo è dato dalla somma tra il costo del tempo di viaggio scarico e quello eventualmente sostenuto per un'attesa ($\varepsilon \geq 0$) alla nuova origine. Notiamo a questo punto che, siccome ogni prodotto può essere trasportato da un solo tipo di camion, il problema può essere decomposto in R sottoproblemi indipendenti, uno per ogni tipo di camion: i viaggi possono essere partizionati a seconda del tipo di camion che lo può compiere ed assegnati univocamente a un sottoproblema. Infatti, il grafo G precedentemente definito è decomponibile in R componenti connesse massimali. In Fig.2.5.a è schematicamente rappresentato un grafo in cui sono considerati contemporaneamente due tipi di camion; mentre in Fig.2.5.b lo stesso grafo viene decomposto in due componenti secondo quanto detto precedentemente.





[Fig.2.5.a : Rete con due tipi di camion]



[Fig.2.5.b: Rete per ogni tipo di camion]

Data l’equivalenza delle due definizioni del problema, e vista la maggiore semplicità nell’esposizione del problema decomposto, supporremo di costruire un grafo *G* per ogni tipo di camion. Di fatto nell’implementazione degli algoritmi questa è la scelta più efficiente.

Per quanto riguarda la domanda ai nodi, i nodi s_z hanno deficit –1 ed i nodi e_z +1, mentre i nodi $e_{0r(z)}$, $s_{0r(z)}$ hanno deficit 0. Questo aspetto subirà modifiche nel momento in cui andremo a considerare il problema nella sua interezza, come vedremo nel prossimo paragrafo .

Diamo ora una descrizione analitica del modello, descrivendo innanzitutto le variabili decisionali e riepilogando in maniera sintetica i parametri che saranno utilizzati.

VARIABILI DECISIONALI

w_r : numero totale di camion di tipo *r* usati ;

$$w_{zu} \begin{cases} 1 & \text{se il viaggio } u \text{ viene fatto dopo il viaggio } z \text{ dallo stesso camion;} \\ 0 & \text{se ciò non accade;} \end{cases}$$

$$w_{0u} \begin{cases} 1 & \text{se il camion lascia il deposito per iniziare il viaggio } u \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $$w_z \begin{cases} 1 & \text{se il camion torna al deposito dopo aver terminato il viaggio } z; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

PARAMETRI

- W_r :dimensione della flotta (numero di camion di tipo *r* disponibili);
- δ_{zu} :durata del viaggio del camion scarico tra la destinazione d_z (fine del viaggio *z*) e l'origine o_u (inizio del viaggio *u*) [hr];
- ε: parametro di tolleranza. massima attesa all'origine [hr];
- CE_r : costo orario di un camion di tipo *r* quando questo viaggia scarico [$/hr];
- CQ_r: costo orario di un camion di tipo *r* quando questo attende [$/hr];
- FC_r : costo fisso di inserimento del camion di tipo *r* nel sistema [$];

VINCOLI

Dato che il problema è decomponibile, descriviamo solamente il sottoproblema relativo al generico tipo di camion r. Sia *V(r)* l'insieme dei viaggi associati al camion *r*, allora:

a) ogni viaggio deve essere compiuto da esattamente un camion:

$$\sum_{u \in V(r)} w_{zu} = 1 \quad z \in V(r)$$

$$\sum_{z \in V(r)} w_{zu} = 1 \quad u \in V(r)$$

b) non possono essere usati più camion di quelli disponibili:

$$w_r \le W_r$$

c) se il viaggio è il primo della giornata per un determinato camion, esso parte dal deposito; se si tratta dell'ultimo viaggio, il camion torna al deposito:

$$(i) \sum_{u \in V(r)} w_{0u} = w_r$$

$$(ii) \sum_{z \in V(r)} w_{z0} = w_r$$

FUNZIONE OBIETTIVO

Minimizzazare il totale dei costi sostenuti, considerando i costi fissi per l'introduzione di un nuovo camion nel sistema, quelli sostenuti per i viaggi di ritorno dei camion scaricati ,ed infine i costi di attesa alla nuova origine.

$$min\ z = \sum_{r=1}^{R} \left(\sum_{z \in V(r)} \sum_{u \in V(r)} CEQ_{zu} + FC_r w_r \right)$$

dove $CEQ_{zu} = [CE_{r_z} \delta_{zu} + CQ_{r_z} (h_u - l_z - \delta_{zu})]$

Nella definizione di CEQ_{zu} ,il primo termine corrisponde al costo del tempo di viaggio scarico tra la destinazione del viaggio *z* e l'origine del viaggio *u*, mentre il secondo corrisponde al costo del tempo di attesa. Riepilogando, il modello per l'assegnazione dei camion ai viaggi, limitatamente ai camion del generico tipo *r*, è il seguente :

$$min\ z = \sum_{r=1}^{R} \left(\sum_{z \in V(r)} \sum_{u \in V(r)} CEQ_{zu} + FC_r w_r \right)$$

$$\sum_{u \in V(r)} w_{zu} = 1 \quad z \in V(r)$$

$$\sum_{z \in V(r)} w_{zu} = 1 \quad u \in V(r)$$

$$w_r \leq W_r$$

$$\sum_{u \in V(r)} w_{0u} = w_r$$

$$\sum_{z \in V(r)} w_{z0} = w_r$$

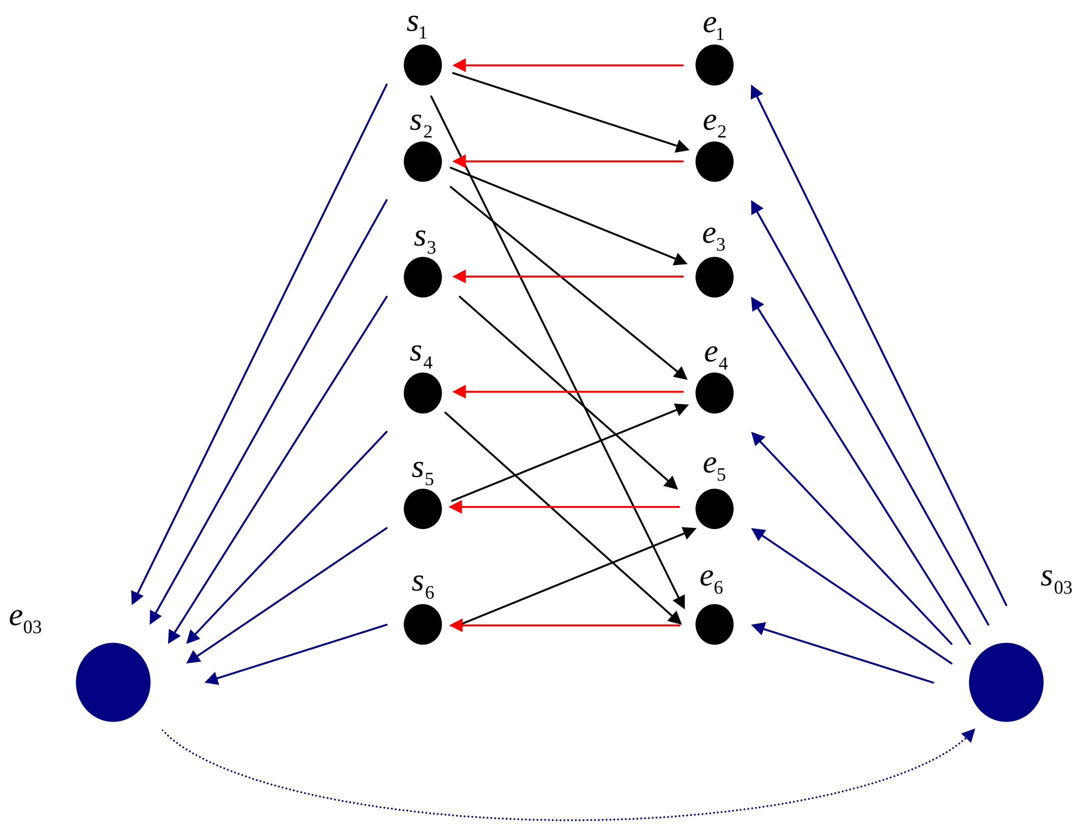
$$w_{zu} \in \{0,1\};$$

2.3 Modello «monolitico»

Per combinare i due modelli occorre modificare il problema di scheduling in modo tale che la decisione di effettuare o meno un certo viaggio non sia fissata, ma possa essere presa dal modello. Per fare questo modifichiamo il grafo associato al problema di schedulazione dei camion nel seguente modo. Innanzitutto introduciamo una coppia di nodi *per ogni* possibile viaggio carico; si noti che nel modello presentato nel paragrafo 2.2 esisteva una coppia di nodi solamente per ogni viaggio che in precedenza si era deciso di compiere. Inoltre si pone 0 come flusso entrante e come flusso uscente dai nodi s_z ed e_z , e si aggiunge l'arco «all'indietro» (e_z, s_z) di capacità uguale a 1, come mostrato in Fig.2.7. L'arco (e_z, s_z) rappresenta il viaggio *z* ed ha costo 0. L'arco «all'indietro» (e_z, s_z) corrisponde alla variabile y_{ihjl}^{k} nel modello di trasporto, dove:

- (i,h) = origine e intervallo di partenza del viaggio z;
- (j,l) = destinazione e intervallo di arrivo del viaggio z;
- k = tipo di prodotto trasportato durante il viaggio z.

Fissando il valore di y_{ihjl}^{k} a 0 i due nodi (i,h) e (j,l) possono essere eliminati, in quanto risulta chiaro che attraverso di essi non transiterà mai flusso. Viceversa, fissare y_{ihjl}^{k} a 1 è equivalente a cancellare l'arco e associare domande 1 e –1 rispettivamente ai nodi origine e destinazione di tale arco. Di conseguenza il modello presentato nel precedente paragrafo altro non è che il modello corrente con una specifica scelta dei valori delle variabili y_{ihjl}^{k} .



[Fig.2.8: Problema di assegnamento nel modello «monolitico»]

Dal punto di vista del modello analitico, le modifiche nel problema di assegnamento riguardano i vincoli:

$$\sum_{u \in V(r)} w_{zu} = \bar{y}_z \quad z \in V(r)$$

$$\sum_{z \in V(r)} w_{zu} = \bar{y}_z \quad u \in V(r)$$

Nella formulazione separata dei due problemi le due sommatorie erano poste uguali a 1 per esprimere il fatto che ogni viaggio doveva essere fatto; adesso le stesse sommatorie dovranno risultare uguali a 1 se e solo se il corrispondente viaggio sarà selezionato dal modello.

Tenendo conto di queste modifiche scriviamo ora una formulazione analitica del modello «monolitico».

$$min\ z = \sum_{i,h,j,l,k} CTQ_{ihjl}^{k}\, y_{ihjl}^{k} + \sum_{r=1}^{R} \left(\sum_{z \in V(r)} \sum_{u \in V(r)} CEQ_{zu} + FC_r w_r \right)$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_{ih}^{k} \le 1 \ \forall i, h$$

$$y_{ih}^{k} - y_{i(h-1)h}^{k} + y_{ih(h+1)}^{k} = P_{ih}^{k} \quad \forall i, h, k$$

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{h=1}^{H_i} y_{ihjl}^{k} = D_{jl}^{k} \quad \forall j, l, k$$

$$\sum_{i=1}^{I} y_{iH_i} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{h=1}^{H_i} P_{ih}^{k} - \sum_{j=1}^{J} \sum_{l=1}^{L_j} D_{jl}^{k} \quad \forall k$$

$$y_{ihjl}^{k} = \bar{y}_z \ \forall i, h, j, l, k \qquad se\ o_z = i,\ d_z = j,\ h_z = h,\ l_z = l,\ k_z = k$$

$$\sum_{u \in V(r)}^{p} w_{zu} = \bar{y}_z \quad z \in V(r), r = 1,..R$$

$$\sum_{z \in V(r)} w_{zu} = \bar{y}_z \quad u \in V(r), r = 1,...R$$

$$w_r \le W_r \quad r = 1,\dots,R$$

$$\sum_{u\in V(r)} w_{0u} = w_r \quad r = 1,\dots,R$$

$$\sum_{z\in V(r)} w_{z0} = w_r \quad r = 1,\dots,R$$

$$y_{ih(h+1)}^{k} \geq 0; \; y_{ih}^{k} \in \{0,1\}; \; y_{ihjl}^{k} \geq 0$$

$$\bar{y}_z, w_{zu} \in \{0,1\}$$

Nei capitoli successivi saranno descritte le tecniche risolutive che adotteremo per determinare una soluzione di questo problema.