*Capitolo 3*

# Approcci algoritmici

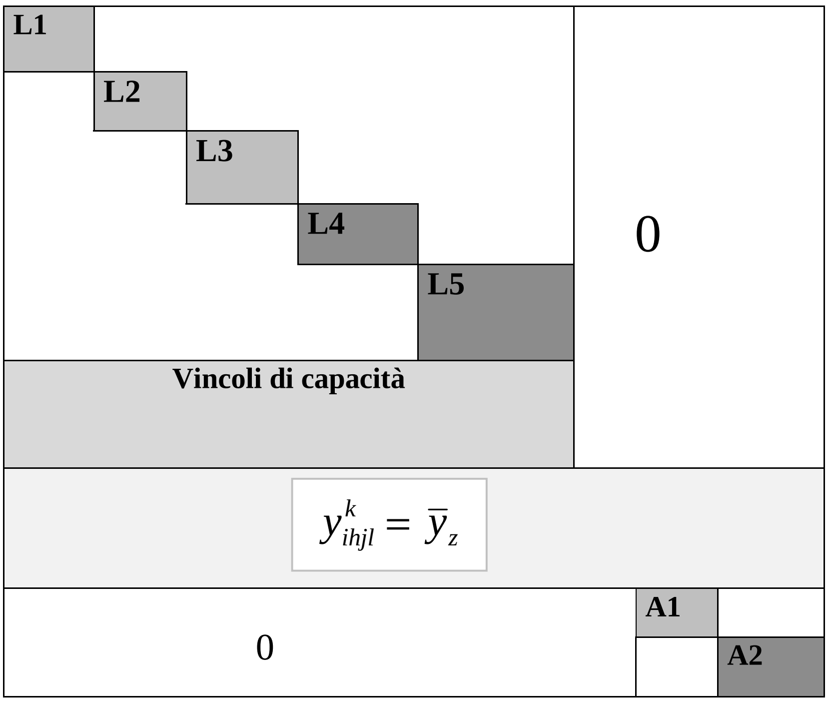
In questo capitolo descriveremo alcuni approcci algoritmici mirati alla risoluzione del problema presentato nel primo capitolo. Ci sono diversi modi di porsi rispetto ad un problema con un numero così elevato di variabili decisionali e vincoli. Ne verranno illustrati due: il primo è un approccio di tipo sequenziale, il secondo è un'euristica Lagrangiana. L'approccio sequenziale consiste nel risolvere il problema "monolitico" in due fasi: prima viene calcolata una soluzione per il problema di trasporto, vengono cioè decisi i viaggi che devono essere fatti, e successivamente viene determinato l'assegnamento ottimale dei camion disponibili a tali viaggi.
L'altro approccio consiste nell'usare tecniche di decomposizione Lagrangiana per decomporre il problema in due sottoproblemi, da risolvere iterativamente fino ad ottenere un lower-bound della soluzione ottima. Combinando questa tecnica risolutiva con la tecnica sequenziale si può costruire una euristica Lagrangiana che potrebbe portare ad avere migliori approssimazioni della soluzione ottima del problema.

## 3.1 Approccio sequenziale

La struttura della matrice dei coefficienti del problema, rappresentata in Fig.3.1 per un esempio con 5 commodities e due tipi di camion, dimostra che il problema ha una parziale struttura a blocchi, connessi da alcuni insiemi di vincoli "complicanti". Ciò suggerisce che il problema possa essere decomposto in sottoproblemi più piccoli rilasciando opportuni insiemi di vincoli, ad esempio, se venissero rilasciati sia i vincoli $\sum_k y_{ihjl}^k = \bar{y}_z$ (che collegano il modello di trasporto a quello di schedulazione) che i vincoli $\sum_k y_{ih}^k \leq 1$ (che collegano tra loro le varie commodities) si otterrebbe una decomposizione del problema sia per tipi di legno che per tipi di camion. Infatti, per ogni tipo $k$ di legno, dove $k = 0,\ldots.K$ si ha un problema di flusso single-commodity a variabili {0,1}, ed abbiamo già mostrato come il problema di scheduling si decomponga naturalmente in tanti sottoproblemi quanti sono i diversi tipi di camion. Tali sottoproblemi potrebbero essere facilmente risolti usando algoritmi estremamente efficienti. Il grave inconveniente di questo modo di procedere è che, rilassando i vincoli di capacità del problema di trasporto, la soluzione che otterremmo sarebbe ammissibile per il problema di scheduling, ma non per il problema di trasporto. Sarebbe, di conseguenza necessaria un'euristica per costruire, a partire dalla soluzione ottenuta, una soluzione ammissibile per il problema globale. Per evitare ciò procediamo rilassando solo il vincolo di collegamento tra i due modelli, ottenendo così una decomposizione del modello "monolitico" nelle due parti analizzate nel Cap.2.

Con riferimento alla Fig.3.1, procedere sequenzialmente significa risolvere prima la parte del problema corrispondente alla metà sinistra della figura, cioè calcolare la soluzione ottima per il problema di trasporto. Ciò può essere visto come il rilassamento del vincolo $y_{ihjl}^{k} = \bar{y}_z$: infatti, è chiaro che se tale vincolo viene rilasciato, la soluzione in cui $\bar{y}_z = 0$ per ogni z è ottima per il problema di scheduling, in quanto non c'è nessuna ragione per compiere i viaggi. Una volta che il problema di trasporto ha determinato i viaggi, si ri-inseriscono i vincoli $y_{ihjl}^{k} = \bar{y}_z$ nel problema, fissando però le variabili $y_{ihjl}^{k}$ : ciò corrisponde a risolvere il problema di scheduling, ottenendo l'assegnamento ottimale dei camion disponibili ai viaggi fissati dal primo problema.

In questo modo la soluzione ottima del modello di trasporto ci porta ad ottenere una soluzione ottima anche per il secondo modello, che però, in principio, non è ottima per il problema nella sua interezza (anche se potrebbe essere una buona approssimazione).




[Fig.3.1: Schema in forma matriciale del modello matematico ]

## 3.2 Rilassamento Lagrangiano

La tecnica di rilassamento Lagragiana ha dei punti in comune con l'approccio sequenziale, infatti il vincolo oggetto del rilasciamento è sempre il vincolo di "collegamento" tra i due modelli. Questa volta, però, invece di essere eliminato il vincolo viene rilassato in modo Lagrangiano: scelto un vettore di moltiplicatori Lagrangiani $\lambda_{ihjl}^{k}$, all'eliminazione del vincolo corrisponde l'aggiunta nella funzione obiettivo del termine

$$\sum_{i,h,j,l,k} \lambda_{ihjl}^{k} (y_{ihjl}^{k} - \bar{y}_z)$$

Si noti che l'eliminazione del vincolo vista nel precedente paragrafo può essere considerata un caso particolare di rilassamento Lagrangiano in cui $\lambda_{ihjl}^{k} = 0$.

La risultante funzione obiettivo è :

$$min\ z = \sum_{i,h,j,l,k} CTQ_{ihjl}^{k} y_{ihjl}^{k} + \sum_{r=1}^{R} \left( \sum_{z \in V(r)} \sum_{u \in V(r)} CEQ_{zu} + FC_r w_r \right)$$
$$+ \sum_{i,h,j,l,k} \lambda_{ihjl}^{k} \left( y_{ihjl}^{k} - \bar{y}_z \right)$$

L'introduzione di questo termine alla funzione obiettivo ci permette di ottenere la scissione del modello nel seguente modo:

- Modello per la programmazione dei viaggi

$$min\ z_1 = \sum_{i,h,j,l,k} ( CTQ_{ihjl}^{k} + \lambda_{ihjl}^{k} ) y_{ihjl}^{k}$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_{ih}^{k} \leq 1 \quad \forall i, h$$

$$y_{ih}^{k} - y_{i(h-1)h}^{k} + y_{ih(h+1)}^{k} = P_{ih}^{k} \quad \forall i,h,k$$

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{h=1}^{H_i} y_{ihjl}^{k} = D_{jl}^{k} \quad \forall j, l, k$$

$$\sum_{i=1}^{I} y_{iH_i} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{h=1}^{H_i} P_{ih}^{k} - \sum_{j=1}^{J} \sum_{l=1}^{L_j} D_{jl}^{k} \quad \forall k$$

$$y_{ih(h+1)}^{k} \geq 0;\ y_{ih}^{k} \in \{0,1\};\ y_{ihjl}^{k} \geq 0$$

- Modello di schedulazione dei camion ai viaggi

$$min\ z = \sum_{r=1}^{R}\left(\sum_{z\in V(r)}\sum_{u\in V(r)} CEQ_{zu} + FC_r w_r\right) - \sum_{i,h,j,l,k}\lambda_{ihjl}^{k}\,\bar{y}_z$$

$$\sum_{u\in V(r)} w_{zu} = \bar{y}_z \quad z\in V(r), r=1,..R$$

$$\sum_{z\in V(r)} w_{zu} = \bar{y}_z \quad u\in V(r), r=1,...R$$

$$w_r \le W_r \quad r=1,...,R$$

$$\sum_{u\in V(r)} w_{0u} = w_r \quad r=1,...,R$$

$$\sum_{z\in V(r)} w_{z0} = w_r \quad r=1,...,R$$

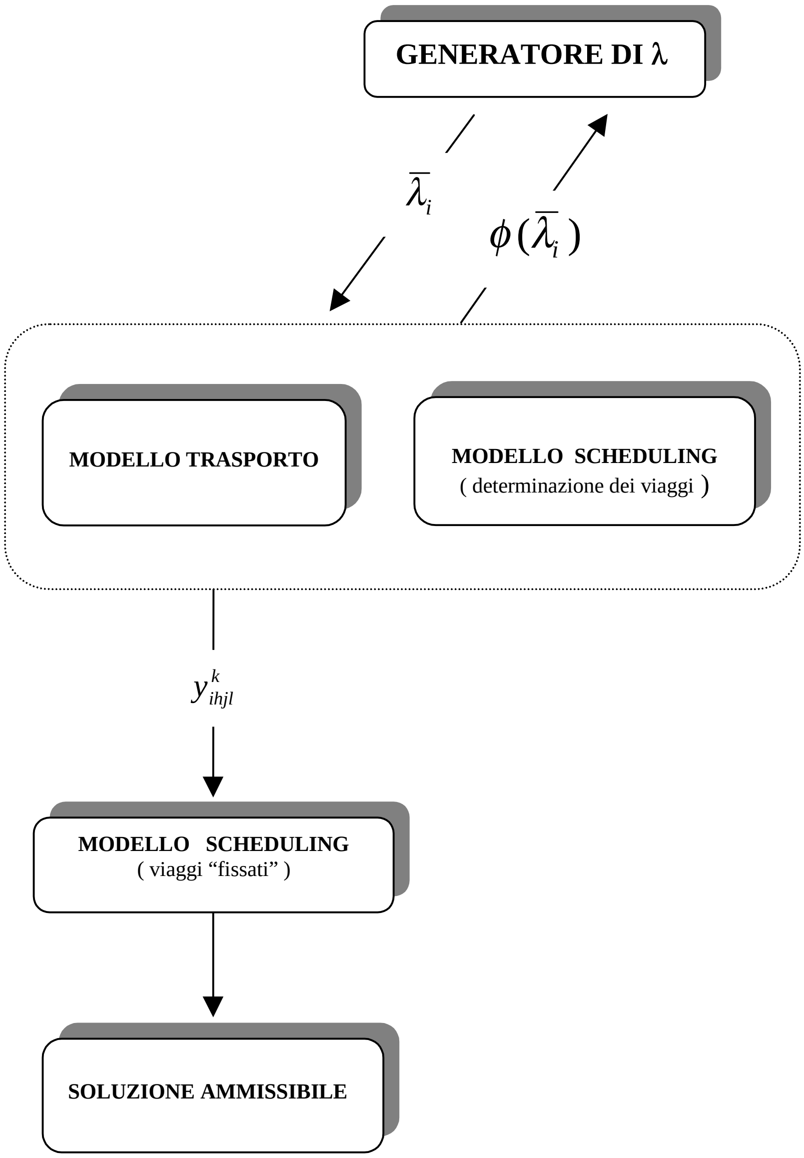
$$\bar{y}_z, w_{zu} \in \{0,1\}$$

Per ogni scelta del vettore di moltiplicatori Lagrangiani $\lambda_{ihjl}^{k}$, il valore ottimo $\phi(\lambda)$ del rilasciamento Lagrangiano fornisce un lower-bound della soluzione ottima del problema originale; di conseguenza si pone il problema di determinare il valore del miglior rilasciamento Lagrangiano possibile. Tale valore corrisponde al valore della soluzione ottima del Duale Lagrangiano $LR_\lambda$ :

$$(D) \quad max_\lambda \phi(\lambda)$$

La risoluzione del Duale Lagrangiano richiede la massimizzazione di una funzione $\phi$ non differenziabile, per cui esistono tecniche “ad hoc”[ Fr-97 ]. La soluzione ottima $\left(\lambda_{ihjl}^{k}\right)^*$ di $(D)$, o una sua “buona approssimazione”, consente di trasferire informazioni tra i due sottoproblemi: nel nostro caso, ad esempio, fornisce una misura di quanto convenga o meno fare certi viaggi anziché altri. Si noti, infatti, che nel problema di schedulazione gli archi corrispondenti ai viaggi carichi (“all’indietro”) in principio non hanno costo: il loro costo nel rilassamento Lagrangiano è esattamente $-\lambda_{ihjl}^{k}$. Quindi, un valore positivo del moltiplicatore Lagrangiano associato ad un certo viaggio “informa” il modello di schedulazione che tale viaggioè necessario per il modello di trasporto. Si ricordi infatti che, per $\lambda = 0$, nessun viaggio viene scelto nel modello di schedulazione, che non ha nessun motivo per compierne: se alcune componenti di $\lambda$ divengono positive, invece, i viaggi corrispondenti potrebbero essere scelti dal modello di schedulazione.

Quanto detto suggerisce l'euristica Lagrangiana: poichè la soluzione di $\phi(\lambda)$ è un processo iterativo in cui viene generata una sequenza di vettori $\lambda_{ihjl}^{k}$ che approssima sempre meglio $(\lambda_{ihjl}^{k})^*$, si può usare l'euristica sequenziale ad ogni passo come illustrato in Fig.3.2 (per semplificare la notazione poniamo $\bar{\lambda} = \lambda_{ihjl}^{k}$ ).




[ Fig.3.2: Processo iterativo dell'euristca Lagrangiana ]

A partire da un vettore iniziale $\bar{\lambda}_0 = 0$, ad ogni passo si calcolano due diversi valori:

- il primo è $\phi(\lambda_i)$, ottenuto risolvendo $LR_{\lambda_i}$, ossia un limite inferiore della soluzione ottima del problema;
- il secondo è ottenuto a partire dalla soluzione del modello di trasporto: ciò che ci interessa sono in particolare le variabili $y_{ihjl}^{k}$. Risolvere il modello di scheduling ristretto a tali variabili ci porta al procedimento visto nel precedente paragrafo: otteniamo quindi una soluzione ammissibile per il problema globale.

In seguito viene generato, tramite gli algoritmi descritti in [Fr-97], un nuovo vettore di moltiplicatori $\overline{\lambda}_{i+1}$ a partire dal quale si itera il procedimento appena descritto fino al raggiungimento di un opportuno criterio di arresto prestabilito.

Queste iterazioni potrebbero portare ad incrementare il valore del lower-bound $\phi(\lambda_i)$, e contemporaneamente ad abbassare il valore della soluzione ammissibile, come mostrato in Fig.3.3.

All’aumentare del numero di iterazioni questi due valori tendono ad avvicinarsi tra loro fornendo, quindi, approssimazioni sempre migliori della soluzione ottima del problema, ed anche una valutazione dell’errore (GAP) compiuto accettando la miglior soluzione ammissibile finora determinata come soluzione ottima.

[Fig.3.3: Rappresentazione grafica del risultato delle iterazioni]