

UNIVERSITÀ DI PISA

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Metodi Bundle Generalizzati non
Monotoni per l'Ottimizzazione non
Differenziabile**

Autore:

Damiano ZEFFIRO

Relatore:

Prof. Antonio FRANGIONI

Dipartimento di matematica

Luglio 2016

Indice

Indice	i
1 Introduzione	1
2 Funzioni coniugate	3
2.1 Motivazione	3
2.2 Proprietà delle funzioni coniugate	4
2.3 Dualità di Fenchel	6
3 Metodo del piano di taglio	8
3.1 Motivazione	8
3.2 Definizione del metodo	10
3.3 Convergenza	10
3.4 Metodo del piano di taglio dal punto di vista duale	12
3.4.1 Problema duale per metodo del piano di taglio	12
3.4.2 Schema algoritmo duale	14
3.5 Limitazioni del metodo	15
4 Metodi Bundle	17
4.1 Notazione	17
4.2 Introduzione	17
4.3 Proprietà funzione di penalizzazione	18
4.4 Proprietà del master problem e funzione di merito	20
4.5 Problema duale	23
4.6 Proprietà soluzioni del problema master	24
4.7 Il bundle primale	25
4.8 Algoritmo non monotono con funzione di merito uguale alla funzione master	27
4.9 Dimostrazione di convergenza	29
4.10 Algoritmo bundle non monotono con funzione di merito generica	37
5 Conclusioni	42
5.1 Cenni su stime di efficienza	42
5.2 Possibili sviluppi	45
A Nozioni preliminari	47
A.1 Teoremi di separazione	47
A.2 Funzioni convesse e sottodifferenziale	51

B Moduli di continuità

59

1. Introduzione

La minimizzazione di una funzione convessa f definita su un sottoinsieme convesso X di \mathbb{R}^n

$$f^* = \inf\{f(x), x \in X\} \quad (1.0.1)$$

è uno dei problemi più studiati della Programmazione Nonlineare. Molti metodi di risoluzione sono basati sulla determinazione di una direzione di discesa. Se f è differenziabile una direzione di discesa è quella opposta al gradiente; scegliere questa direzione può non essere molto efficiente, e solitamente gli algoritmi di minimizzazione sfruttano eventuali derivate di ordine superiore.

Nel caso in cui la funzione non sia differenziabile, molti algoritmi per la minimizzazione di funzioni convesse usano il sottogradiente, dove un elemento $z \in \mathbb{R}^n$ è un sottogradiente per f in x_0 se

$$f(x) \geq f(x_0) + z \cdot (x - x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Oltre al fatto che tutti i minimi locali sono anche globali, l'ipotesi che f sia convessa garantisce anche l'esistenza di almeno un sottogradiente in ogni punto appartenente alla parte interna del dominio di f .

I metodi illustrati in questo elaborato assumono di aver a disposizione $f(x)$ e almeno un sottogradiente z per f in x per ogni x , ed eventualmente possono salvare queste informazioni per ogni punto "visitato" in un insieme detto bundle

$$\mathcal{B} = \{(x_i, f(x_i), z_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$$

Il primo metodo trattato sarà il metodo del Piano di Taglio, che, introdotto da Kelley in [1], è stato una delle prime tecniche impiegate per la risoluzione di problemi di minimizzazione convessa vincolata. Viene riportato un esempio comparso per la prima volta in [2], che dimostra come fissata una soglia di tolleranza per l'errore nella risoluzione del problema (1.0.1) il metodo può impiegare un tempo esponenziale in n .

Sarà poi definito un metodo di tipo proximal bundle con termine di stabilizzazione generico, e ne sarà trattata la convergenza. Questo metodo ad ogni iterazione cerca di minimizzare all'interno di un insieme di *punti tentativo* un'opportuna funzione di merito ϑ in generale diversa da f . Può essere pertanto non monotono in f , a differenza della maggior parte dei metodi Bundle fino ad ora studiati. Questa tipologia di approccio è stata discussa per la prima volta in [3] per un metodo con termine di stabilizzazione quadratico. Qui i risultati di [3] vengono generalizzati, sfruttando anche il lavoro dell'articolo [4] sui metodi proximal bundle con termini di stabilizzazione generici. Viene anche analizzato il caso in cui il metodo usa una particolare funzione di merito simmetrica a (in un senso che sarà precisato) rispetto a problema primale e problema duale meno del termine di penalizzazione, ottenendo però proprietà di convergenza più deboli.

La dimostrazione di convergenza dei metodi bundle usa la dualità di Fenchel e le proprietà delle funzioni coniugate. Inoltre si basa sul fatto che il valore della funzione di merito dipende dal minimo di una certa funzione definita nell'involuppo convesso dei gradienti del bundle e con differenziale continuo. Questo consente di stimare facilmente il miglioramento della funzione di merito in seguito all'aggiunta di un elemento al bundle. Tutta questa analisi viene semplificata grazie al ben noto *trucco di aggregazione* usato anche in [3] e in [4], che consente di trattare bundle con soli due elementi.

Dopo questa introduzione, nel capitolo 2 saranno enunciati e dimostrati alcuni risultati sulle funzioni coniugate essenziali al resto della trattazione; il capitolo 3 tratterà l'algoritmo del piano di taglio, mentre il capitolo 4 sarà dedicato allo studio di un metodo proximal bundle; infine, nel capitolo 5 verranno discusse le conclusioni.

2. Funzioni coniugate

Vengono qui enunciati e dimostrati alcuni risultati di base sulle coniugate convesse di funzioni definite su \mathbb{R}^n e a valori in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Per approfondimenti e generalizzazioni dei risultati proposti, il lettore interessato può consultare [5].

2.1 Motivazione

Nel resto della trattazione verrà usata la seguente definizione di funzione propria:

Definizione 2.1.1. *Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ viene chiamata propria se esiste $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x) \neq \infty$.*

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile due volte con immagine del differenziale ∇f uguale al sottoinsieme Z di \mathbb{R}^n . Supponendo l'esistenza di $\nabla f^{-1}(x)$, funzione inversa del differenziale definita da Z a \mathbb{R}^n , siano $x(z) = \nabla f^{-1}(z)$ e $z(x) = \nabla f(x)$. Sia

$$h(z) = x(z) \cdot z - f(x(z))$$

per ogni z in Z . Tale funzione, chiamata *trasformata di Legendre* di f , ha per differenziale proprio $z(x)$. Se oltre alle precedenti ipotesi f è anche convessa, allora

$$h(z) = - \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) - z \cdot x$$

perché la funzione convessa $f(x) - z \cdot x$ ha un minimo in $x = x(z)$. Più in generale, se f non è differenziabile $h(z)$ ha minimo per gli x tali che $z \in \partial f(x)$. Questo motiva la seguente definizione:

Definizione 2.1.2. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una funzione propria. Si definisce coniugata di f la funzione $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:*

$$f^*(z) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} z \cdot x - f(x)$$

per ogni z in \mathbb{R}^n .

2.2 Proprietà delle funzioni coniugate

In questa sezione sono elencate proprietà delle funzioni coniugate che saranno poi essenziali nello studio dei problemi duali. In particolare verrà discussa la loro relazione con il sottodifferenziale e alcune regole di calcolo. Questi argomenti vengono trattati in maniera esaustiva in [5, Capitolo X].

Teorema 2.2.1. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una funzione propria, ed f^* la sua coniugata. Allora:*

- (1) $f \geq g \Rightarrow g^* \geq f^*$.
- (2) f^* è convessa e semicontinua inferiormente.
- (3) $f(x) + f^*(z) \geq zx$ per ogni z, x .
- (4) $f^{**} \leq f$.
- (5a) $(f(\cdot + x))^*(z) = f^*(z) - zx$ per ogni z, x .
- (5b) $(af(b\cdot))^*(z) = af^*\left(\frac{z}{ab}\right)$.

Dimostrazione. (1) Poiché per ogni x si ha che $zx - f(x) \leq zx - g(x)$, per ogni z si ha $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} zx - f(x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} zx - g(x)$, ovvero $g^* \geq f^*$.

(2) Per ogni x sia $f_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione affine tale che $f_x(z) = zx - f(x)$ per ogni z . Allora $f^* = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f_x$ è semicontinua inferiormente e convessa in quanto *sup* di funzioni semicontinue inferiormente e convesse.

(3) Per ogni z per la definizione di funzione coniugata vale $f^*(z) \geq zx - f(x)$ per ogni x , da cui la tesi.

(4) Per la proprietà (3) $f(x) \geq zx - f^*(z)$ per ogni x , da cui segue subito la disuguaglianza perché $f^{**}(x) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} zx - f^*(z)$.

(5a) $(f(\cdot + x))^*(z) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} zy - f(y + x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (z(y + x) - f(y + x)) - zx = f^*(z) - zx$.

(5b) $(af(b\cdot))^*(z) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} zy - af(by) = a(\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{z}{ab}y - f(y)) = af^*\left(\frac{z}{ab}\right)$. □

Se f è anche convessa, allora la funzione coniugata (e in particolare il suo sottodifferenziale) ha proprietà molto interessanti per l'analisi di algoritmi di ottimizzazione convessa.

Teorema 2.2.2. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una funzione convessa propria e semicontinua inferiormente, ed f^* la sua coniugata. Allora:*

$$(6) f = f^{**}.$$

$$(7) x \in \partial_\varepsilon f(z) \Leftrightarrow z \in \partial_\varepsilon f(x) \text{ per ogni } \varepsilon \geq 0.$$

Dimostrazione. (6) Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste una funzione affine h_x tale che $h_x(x) = f(x)$ e $h_x \leq f$. Inoltre, $h_x = h_x^{**}$ e per la proprietà (1) vale anche $h_x^{**} \leq f^{**}$, e quindi $f^{**} \geq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} h_x^{**} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} h_x = f$. Dalla proprietà (4) segue la tesi.

$$(7) z \in \partial_\varepsilon f(x) \text{ se e solo se } z(y-x) - \varepsilon + f(x) \leq f(y) \text{ per ogni } y. \quad \square$$

Per la proprietà (3) vale anche $zy - f^*(z) \leq f(y)$ per ogni y . Quindi $\sup_{y \in \mathbb{R}^n} zy - zx - \varepsilon + f(x) - f(y) \leq 0 = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} zy - f^*(z) - f(y)$. Ne segue che

$$-zx - \varepsilon + f(x) \leq -f^*(z) \quad (2.2.1)$$

Viceversa, se vale la (2.2.1) allora la funzione $h(y) = zy - f^*(z)$ soddisfa $h \leq f$ e $f(x) - h(x) \leq \varepsilon$, per cui $z \in \partial_\varepsilon f(x)$.

In maniera completamente analoga per simmetria sfruttando la proprietà (7) si ha che $x \in \partial_\varepsilon f(z) \Leftrightarrow -zx - \varepsilon \leq -f^*(z) - f(x)$.

Visto che per alcune delle funzioni trattate sarà necessario assumere la differenziabilità della funzione coniugata, può essere interessante vedere come si traduce questa ipotesi per la funzione originale. Vale il seguente teorema:

Teorema 2.2.3. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una funzione convessa propria, e semicontinua inferiormente. Allora f è strettamente convessa in $\text{dom } f$ se e solo se*

1. $\text{int}(\text{dom } f^*) \neq \emptyset$,
2. $f^*(z)$ è differenziabile in $\text{int}(\text{dom } f^*)$ e $\partial f^*(z) = \emptyset$ per ogni $z \in \text{rbd}(\text{dom } f)$.

Dimostrazione. \Rightarrow : Si osservi innanzitutto che

$$|\partial f^*(z)| \leq 1 \text{ per ogni } z \in \mathbb{R}^n \quad (2.2.2)$$

Infatti se $x_1, x_2 \in \partial f(z)$ con $x_1 \neq x_2$ allora $z \in \partial f(x_1) \cap \partial f(x_2)$, e quindi $f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) = f(x_1) + \lambda(x_2 - x_1) \cdot z = \lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_1)$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$ contraddicendo la stretta convessità di f^* .

(1) Sia $\text{ri}(\text{dom } f^*) = A$, e sia $z \in A$. Esiste allora $x \in \partial f^*(z)$ per il teorema A.2.6. Sia V la giacitura di $\text{aff } A$. Si assuma per assurdo che tale giacitura sia diversa da \mathbb{R}^n . Allora esisterebbe w perpendicolare a V , e in particolare $x + \lambda w$ sarebbe contenuto in ∂f^* per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, contraddicendo la (2.2.2).

(2) La (2.2.2) e il teorema A.2.6 implicano che f^* è differenziabile in $\text{int}(\text{dom } f^*)$. Se

$z \in \text{rbd}(\text{dom } f^*)$ allora per il teorema di separazione debole esiste $w \neq 0$ tale che $w \cdot (z' - z) \leq 0$ per ogni $z' \in \text{dom } f^*$. Allora se per assurdo esistesse $x \in \partial f^*(z)$ si avrebbe $x + \lambda w \in \partial f^*(z)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, in contraddizione con la (2.2.2).

\Leftarrow : Si assuma per assurdo che f sia strettamente convessa in $\text{dom } f$. Allora esistono $x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che $x \neq y$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$ vale $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. Sia $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$h(\gamma) = f(x) + \gamma \frac{f(y) - f(x)}{\|y - x\|}$$

Allora $h(\gamma) \leq f(x + \gamma(y - x))$ per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$, da cui se $h'(x') = h(\frac{x' - x}{\|y - x\|})$ allora $h'(x) \leq f(x')$ per x' appartenente al sottospazio affine $\{x + \lambda(y - x) | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Quindi per il teorema A.2.7 esiste un'estensione affine di $h(x')$ a tutto \mathbb{R}^n , o equivalentemente esiste $z \in \partial f(x')$ per ogni $x' \in \text{conv}(x, y)$. Ma allora $x' \in \partial f^*(z)$ per ogni $x' \in \text{conv}(x, y)$, assurdo. \square

2.3 Dualità di Fenchel

La dualità di Fenchel consente di passare dal problema di minimizzazione della somma di due funzioni convesse ad un problema di minimizzazione definito tramite le loro funzioni coniugate. Per una trattazione esaustiva dell'argomento il lettore interessato può consultare [5, Capitolo XII, sezione 5]

Questa dualità è una conseguenza della seguente proposizione, riguardante la formula per la funzione coniugata della somma:

Proposizione 2.3.1. *Siano f e g due funzioni definite da \mathbb{R}^n in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convesse, proprie e semicontinue inferiormente.*

Sia $f^ * g^*(x) = \inf\{f^*(y) + g^*(z) \mid y + z = x, (y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\}$ l'inf-convoluzione di f^* e g^* . Allora $(f + g)^*(x) = f^* * g^*(x)$*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} (f^* * g^*)^*(x) &= \sup_{z \in \mathbb{R}^n} zx - (f^* * g^*)^*(z) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} zx + \sup_{z_1 + z_2 = z} -f^*(z_1) - g^*(z_2) = \\ &= \sup_{z_1 \in \mathbb{R}^n} z_1 x - f^*(z_1) + \sup_{z_2 \in \mathbb{R}^n} z_2 x - g^*(z_2) = f(x) + g(x) \end{aligned}$$

Per la proprietà (7) allora $(f + g)^*(x) = f^* * g^*(x)$. \square

È chiaro come usando il fatto che $-f^*(0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ e la proposizione precedente si può ottenere un problema duale per la minimizzazione della somma di funzioni convesse.

Teorema 2.3.2. *Siano f e g due funzioni convesse, proprie e semicontinue inferiormente tali che $\text{dom } f \cap \text{dom } g \neq \emptyset$.*

Allora i problemi

$$\inf\{f(x) + g(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.3.1}$$

$$\inf\{f^*(z) + g^*(-z) \mid z \in \mathbb{R}^n\} \tag{2.3.2}$$

hanno valori ottimi opposti.

Dimostrazione. Per la proposizione 2.3.1

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + g(x) = -(f + g)^*(0) = - \inf_{z \in \mathbb{R}^n} f^*(z) + g^*(-z) \quad \square$$

La seguente proposizione esprime un'importante relazione tra soluzione del problema primale e soluzione del problema duale.

Proposizione 2.3.3. *Siano f e g due funzioni definite da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} convesse e semicontinue inferiormente tali che $\text{dom } f \cap \text{dom } g \neq \emptyset$.*

Si assuma l'esistenza di \bar{z} tale che $f^(\bar{z}) + g^*(-\bar{z}) = \inf_{z \in \mathbb{R}^n} f^*(z) + g^*(-z)$. Allora l'insieme degli \bar{x} tali che $(f + g)(\bar{x}) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + g(x)$ è uguale a*

$$\partial f^*(\bar{z}) \cap \partial g^*(-\bar{z})$$

Dimostrazione. Se $x \in \partial f^*(\bar{z}) \cap \partial g^*(-\bar{z})$, allora $\bar{z} \in \partial f(x)$ e $-\bar{z} \in \partial g(x)$. Allora $0 \in \partial(f + g)(x)$, e quindi x è un minimo.

Si supponga per assurdo l'esistenza di un x che minimizza $f + g$ ma tale che $x \notin \partial f^*(\bar{z}) \cap \partial g^*(-\bar{z})$. Allora se $x \notin \partial f^*(\bar{z})$ si avrebbe $\bar{z}x - f^*(\bar{z}) < f(x)$ e se $x \notin \partial g^*(-\bar{z})$ si avrebbe $-\bar{z}x - g^*(\bar{z}) < g(x)$, e in particolare $-f^*(\bar{z}) - g^*(\bar{z}) < g(x) + f(x)$. Questo però implicherebbe $\sup -f^*(z) - g^*(z) < \inf f(x) + g(x)$, assurdo. \square

3. Metodo del piano di taglio

3.1 Motivazione

Prima di studiare le proprietà generali dei Metodi Bundle, è opportuno introdurre il metodo del piano di taglio. Storicamente si tratta di uno dei primi algoritmi usati per risolvere problemi di ottimizzazione convessa nondifferenziabile, ed è anche il Metodo Bundle "più semplice" in assoluto.

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la funzione convessa e semicontinua inferiormente da minimizzare. Il metodo del piano di taglio, come molti altri metodi di ottimizzazione, si basa sull'assunzione che dato un punto $x \in \mathbb{R}^n$ sia sempre possibile calcolare $f(x)$ e uno $z \in \partial f(x)$. A differenza di metodi come la discesa del gradiente, usa tutte le informazioni ricavate durante le sue iterazioni per costruire un'approssimazione inferiore della funzione da minimizzare. Più precisamente, l'algoritmo visita una sequenza di punti $\{x_i\}_{1 \leq i \leq k}$, calcolando per ogni x_i il valore di $f(x_i) = f_i$ e uno $z_i \in \partial f(x_i)$. In sintesi dopo la visita di k punti le informazioni a disposizione dell'algoritmo si possono riassumere nell'insieme (detto bundle)

$$\mathcal{B}_k = \{(x_i, f_i, z_i)\}_{1 \leq i \leq k} \quad (3.1.1)$$

Sfruttando le informazioni contenute nell'insieme \mathcal{B}_k si può poi definire un'approssimazione inferiore di f . Osservando che per ogni i la funzione affine $\hat{f}_i(x) = (x - x_i) \cdot z_i + f(x_i)$ è minore di f , si può definire il modello dei piani di taglio di f come

$$\hat{f}_{\mathcal{B}_k}(x) = \sup_{1 \leq i \leq k} \hat{f}_i(x)$$

Questo modello è chiaramente un'approssimazione inferiore di f , e per brevità verrà chiamato in seguito *modello CP* (cutting planes). Per semplicità di notazione $\hat{f}_{\mathcal{B}_k}$ verrà indicata in seguito con \hat{f}^k , e la sua coniugata con \hat{f}_*^k . Dal punto di vista geometrico, per ogni i la funzione \hat{f}_i determina una bisezione di \mathbb{R}^n in due semipiani, dei quali solo uno può contenere la soluzione del problema. Se \bar{x} è soluzione infatti deve valere $\hat{f}_i(\bar{x}) \leq f_i$,

ovvero $\bar{x} \cdot z_i \leq x_i \cdot z_i$, e quindi

$$\bar{x} \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot z_i \leq x_i \cdot z_i\}$$

L'idea dell'algoritmo è di scegliere come x_{k+1} il punto che minimizza l'approssimazione inferiore, ovvero, nel caso del modello CP, la soluzione del seguente problema:

$$\inf\{\hat{f}^k(x) \mid x \in C\} \tag{3.1.2}$$

Dal punto di vista computazionale, se si usa il modello CP, minimizzare l'approssimazione inferiore significa risolvere un problema di programmazione lineare soggetto a k vincoli. Infatti

$$\hat{f}^k(x) = \inf\{v \mid v \geq f_i + (x - x_i) \cdot z_i \forall 1 \leq i \leq k\} \tag{3.1.3}$$

e quindi x è una soluzione per il problema (3.1.2) se e solo se esiste v tale che $(v, x) \in \mathbb{R} \times C$ è la soluzione del seguente problema di programmazione lineare:

$$\inf\{v \mid v \geq f_i + (x - x_i) \cdot z_i \forall 1 \leq i \leq k\} \tag{3.1.4}$$

Inoltre, dal punto di vista della convergenza dell'algoritmo, il teorema A.2.8 garantisce che f è uguale al sup delle funzioni affini che la minorano. È dunque ragionevole aspettarsi che dopo molte iterazioni \hat{f}^k costituisca una buona approssimazione di f , almeno nel caso in cui l'algoritmo converga e localmente rispetto al punto di convergenza.

In generale però la funzione \hat{f}^k se considerata su tutto \mathbb{R}^n può non avere un minimo, per cui l'algoritmo non viene applicato ad f ma ad alla restrizione di f ad un insieme compatto C . Naturalmente affinché l'algoritmo restituisca il minimo globale di f (ammesso che tale minimo esista) è necessario scegliere C in modo che lo contenga: questo può risultare difficile dal punto di vista computazionale, anche per la difficoltà di distinguere i casi in cui f non ha minimo.

3.2 Definizione del metodo

Dato un $\varepsilon \geq 0$, e usando le definizioni della sezione precedente, il metodo del piano di taglio può essere definito nel seguente modo:

0. Selezionare $x_1 \in C$ e $z_1 \in \partial f(x_1)$, porre $k = 2$.
1. Selezionare $x_k \in \operatorname{argmin}\{\hat{f}^{k-1}(x) \mid x \in C\}$ e $z_k \in \partial f(x_k)$.
2. Porre $\delta_k = f(x_k) - \hat{f}^{k-1}(x_k)$.
3. Se $\delta_k \leq \varepsilon$, l'algoritmo termina.
4. $k \leftarrow k + 1$. Ripartire dallo step 1.

Poiché $\hat{f}^k \leq f$ per ogni k , quando l'algoritmo termina all'iterazione j se \bar{f} è il minimo di f su C allora l'errore è minore o uguale a ε :

$$f(x_j) - \bar{f} \leq f(x_j) - \hat{f}^{j-1}(x_j) \leq \varepsilon$$

Sia ora $m_k = \hat{f}^k(x_{k+1})$ per ogni $k \geq 1$ la soluzione approssimata fornita dalla k -esima iterazione dell'algoritmo. Poiché la successione $\{\hat{f}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è crescente allora anche la successione $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è crescente, con $m_k \leq \bar{f}$ per ogni k .

3.3 Convergenza

Considerando l'algoritmo descritto nella sezione precedente, vale il seguente risultato:

Teorema 3.3.1. *Sia $\varepsilon = 0$ e \bar{f} il minimo di f ristretta a C . Se C è un insieme compatto tale che $f|_C$ è lipschitziana, allora*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) - \bar{f} = 0$$

Dimostrazione. Si assuma per assurdo l'esistenza di un $\mu > 0$ tale che $f(x_i) - \bar{f} > \mu$ frequentemente. Dato $k \in \mathbb{N}$, per ogni $i \leq k$ vale $f(x_i) - (f(x_i) + z_i \cdot (x_{k+1} - x_i)) \geq f(x_i) - \hat{f}^k(x_{k+1})$, da cui:

$$-z_i \cdot (x_{k+1} - x_i) \geq f(x_i) - \hat{f}^k(x_{k+1}) \geq f(x_i) - \bar{f} \quad (3.3.1)$$

Ma se L è la costante di Lipschitz di f vale anche:

$$-z_i \cdot (x_{k+1} - x_i) \leq L \|x_{k+1} - x_i\| \quad (3.3.2)$$

e combinando le disuguaglianze (3.3.1) e (3.3.2) si ha per ogni $j > i$

$$\|x_j - x_i\| \geq \frac{\mu}{L} \quad (3.3.3)$$

Sia ora $\{x_{\mu(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ la sottosuccessione di punti tale che $f(x_{\mu(i)}) - \bar{f} \geq \mu$ per ogni i . Per la (3.3.3) si ha $\|x_{\mu(j)} - x_{\mu(i)}\| \geq \frac{\mu}{L}$ per ogni $j > i$.

Dunque $\{x_{\mu(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ dovrebbe essere una successione di punti isolati nel compatto C , assurdo. \square

Si assuma ora che l'algoritmo per diminuire il numero di vincoli nel problema master utilizzi una successione di bundle $\{\mathcal{B}'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ monotona non decrescente tale che $\mathcal{B}'_k \subseteq \mathcal{B}_k$ per ogni k . Si assuma anche che la successione dei bundle $\{\mathcal{B}'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sia definita in modo da garantire l'esistenza di una successione $\{s(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ crescente e tale che

$$\mathcal{B}'_{s(k)-1} \supseteq \{(x_{s(i)}, z_{s(i)}, f_{s(i)}) \mid 1 \leq i \leq k-1\}$$

per ogni k . La disuguaglianza (3.3.1) è vera se e solo se (x_i, z_i, f_i) fa parte del bundle quando si minimizza \hat{f}^k per calcolare x_{k+1} . Proprio per questa osservazione valgono ancora la (3.3.1) e la (3.3.2) sostituendo gli indici i e $k+1$ con $s(i)$ ed $s(k)$ rispettivamente. Inoltre per la monotonia di $\{\mathcal{B}'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ anche $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è monotona non decrescente, e quindi vale ancora il teorema 3.3.1. In altre parole, la convergenza dell'algoritmo è garantita anche se si scartano alcune informazioni dal bundle in modo però da mantenere ad ogni iterazione tutte le terne associate ad una sottosuccessione di indici fissata. Tuttavia, non esiste un modo ovvio per garantire che la cardinalità del bundle sia limitata durante l'algoritmo; per ottenere questa condizioni sono invece utili i metodi proximal bundle esposti nel capitolo 4.

L'ipotesi che f sia lipschitziana è ad esempio vera se $C \subseteq \text{int}(\text{dom } f)$, come garantito dal teorema A.2.2.

Il teorema appena dimostrato implica che se $\varepsilon > 0$ l'algoritmo termina. Inoltre, se $\varepsilon = 0$ e X è l'insieme dei minimi di $f|_C$, tutte le sottosuccessioni convergenti di $\{x_i\}$ devono convergere ad un punto appartenente ad X . Più precisamente, vale il seguente corollario:

Corollario 3.3.2. *Con le notazioni usate nel teorema 3.3.1, se $\varepsilon = 0$ e X è l'insieme dei minimi di $f|_C$, allora*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{dist}(x_i, X) = 0$$

Dimostrazione. Dalla compattezza di C segue che dato $\mu > 0$ non può esistere una sottosuccessione $\{x_{\mu(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tale che per ogni i valga $\text{dist}(x_i, X) > \mu$. \square

3.4 Metodo del piano di taglio dal punto di vista duale

Sia $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la coniugata di f . Sia \bar{f} il valore ottimo del problema primale

$$\inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \quad (3.4.1)$$

Per la definizione di funzione coniugata, $-f^*(0) = \bar{f}$. Allora si può definire il seguente problema duale

$$\inf\{f^*(z) \mid z = 0\} \quad (3.4.2)$$

che ha valore ottimo $\bar{f}^* = -\bar{f}$.

Il problema di minimizzazione può quindi essere riformulato come problema di approssimazione di una funzione convessa (definita implicitamente) in un punto. Questo problema può essere trattato con diverse tecniche di approssimazione: in questa tesi verrà usata \hat{f}_*^k come approssimazione superiore di f , mentre per un'analisi più generale il lettore interessato può consultare [6].

3.4.1 Problema duale per metodo del piano di taglio

Nello step 3 del metodo del piano di taglio si risolve il problema (3.1.2). Per semplicità conviene inizialmente assumere che il minimo di \hat{f}^k appartenga a C , in modo che il problema (3.1.2) sia equivalente a

$$\inf\{\hat{f}^k(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \inf\left\{\sup_{1 \leq i \leq k} f_i + (x - x_i) \cdot z_i \mid x \in \mathbb{R}^n\right\}$$

Si può ora cercare di ricavare il problema duale nella forma (3.4.2). Serve innanzitutto calcolare $\hat{f}_*^k(z) = \sup\{zx - f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

Per la (3.1.4) vale l'uguaglianza

$$\hat{f}_*^k(z) = \sup\{c \cdot x' \mid Ax' \leq b, x' \in \mathbb{R}^n\} \quad (3.4.3)$$

dove $x' = (x, v) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $c = (z, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $A \in \mathbb{R}^{k \times n+1}$ è definita da

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & -1 \\ z_2 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ z_k & -1 \end{pmatrix}$$

e $b = (z_1 \cdot x_1 - f(x_1), \dots, z_k \cdot x_k - f(x_k))$. Poichè per ogni $1 \leq i \leq k$ si ha che $z_i \in \partial f(x_i) \Rightarrow z_i \cdot x_i - f(x_i) = f^*(z_i)$, vale anche $b = (f^*(z_1), \dots, f^*(z_k))$. È un ben noto risultato di programmazione lineare che il problema (3.4.3) ha lo stesso valore ottimo del seguente duale

$$\inf\{\theta \cdot b \mid \theta^\top A = c^\top, \theta \geq 0\} \quad (3.4.4)$$

dove $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$. Se Δ_k è il semplice standard di dimensione k , la (3.4.4) si può riscrivere come

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i f^*(z_i) \mid \sum_{i=1}^k \theta_i z_i = z, \theta \in \Delta_k \right\} \quad (3.4.5)$$

Essendo $f^*(z)$ uguale al valore ottimo del problema (3.4.4), il duale del problema (3.1.2) nella forma (3.4.2) è

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i f^*(z_i) \mid \sum_{i=1}^k \theta_i z_i = 0, \theta \in \Delta_k \right\} \quad (3.4.6)$$

Un qualsiasi algoritmo di risoluzione per (3.4.6) restituirà anche la soluzione del problema primale (\bar{x}, \bar{v}) , che è sempre necessaria per verificare l'ottimalità della soluzione del problema primale.

L'espressione (3.4.5) consente di descrivere in modo geometrico l'epigrafo di $f^*(z)$. Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione 3.4.1. *Sia $F^* = \{(z_i, \hat{f}_*^k(z_i)) \mid 1 \leq i \leq k\}$, e $P = \text{cone}\{e_{n+1}, 0\}$, dove $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Allora $\text{epi } \hat{f}_*^k = \text{conv } F^* + P$.*

Dimostrazione. $z \in \text{dom } \hat{f}_*^k$ se e solo se esiste $\theta \in \Delta_k$ tale che

$$\sum_{i=1}^k \theta_i (z_i, \hat{f}_*^k(z_i)) = (z, \hat{f}_*^k(z))$$

se e solo se $(z, f(z)) \in \text{conv } F^*$. Ma se G è il grafico di \hat{f}_*^k allora $\text{epi } \hat{f}_*^k = G + P$. \square

3.4.2 Schema algoritmo duale

L'algoritmo del piano di taglio può essere descritto usando il problema duale (3.4.6), nell'assunzione però che questo abbia sempre una soluzione. Per applicare questo algoritmo è pertanto necessario che inizialmente il bundle \mathcal{B}_k garantisca questa condizione. Sia dunque m il minimo indice per cui questo accade. Segue la descrizione dell'algoritmo:

0. $k = m + 1$.
1. Risolvere il problema $\inf\{\hat{f}_*^{k-1}(z) \mid z = 0\}$ ottenendo così nella notazione della (3.4.6) una soluzione $\theta^* \in \Delta_k$ e il valore ottimo $\hat{f}_*^{k-1}(0)$.
2. Ricavare x_k dalla soluzione al problema primale e di conseguenza anche $f(x_k)$ e $z_k \in \partial f(x_k)$. Calcolare $f^*(z_k) = z_k x_k - f(x_k)$.
3. $\delta_k = \hat{f}_*^{k-1}(0) + f(x_k)$.
4. Se $\delta_k \leq \varepsilon$, l'algoritmo termina.
5. $k \leftarrow k + 1$. Ripartire dallo step 1.

Poiché $-\hat{f}_*^{k-1}(0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \hat{f}^{k-1}(x)$, il δ_k usato dall'algoritmo duale è esattamente lo stesso δ_k usato dall'algoritmo primale (a parità di bundle).

Nel problema duale δ_k ha anche un'interpretazione geometrica interessante.

Sia $h_i(z) = f^*(z_i) + x_i \cdot (z - z_i)$ l'approssimazione inferiore di f^* associata al sottogradiente x_i del punto z_i . Come già osservato, \hat{f}_*^{k-1} è un'approssimazione inferiore di f^* il cui grafico è il "bordo inferiore" dell'involuppo convesso dei punti $\{(x_i, f^*(x_i)) \mid 1 \leq i \leq k-1\}$ (vedere figura 3.1).

Poiché $-f(x_i) = f^*(z_i) - z_i \cdot x_i = h_i(0)$, per ogni i il punto $(0, -f(x_i))$ è l'intersezione del grafico di h_i con la retta verticale λe_{n+1} , $\lambda \in \mathbb{R}$. Questa intersezione sta sotto il grafico di f^* : infatti, $f^*(0) = -\bar{f}$ implica che $f^*(0) \geq -f(x)$ per ogni x .

Infine, $\delta_k = \hat{f}_*^{k-1}(0) + f(x_k) = \hat{f}_*^{k-1}(0) - h_k(0)$ e valgono le disuguaglianze

$$\delta_k \geq f^*(0) + f(x_k) \geq 0$$

L'uguaglianza c'è se e solo se $\hat{f}_*^{k-1}(0) = f^*(0)$ e $f(x_k) = \bar{f}$.

A partire dalla descrizione dell'algoritmo duale naturalmente si possono ricavare le stesse proprietà di convergenza dimostrate nel caso dell'algoritmo primale. Ad esempio, si può ancora ricavare la disuguaglianza (3.3.1), da cui deriva facilmente la convergenza dell'algoritmo.

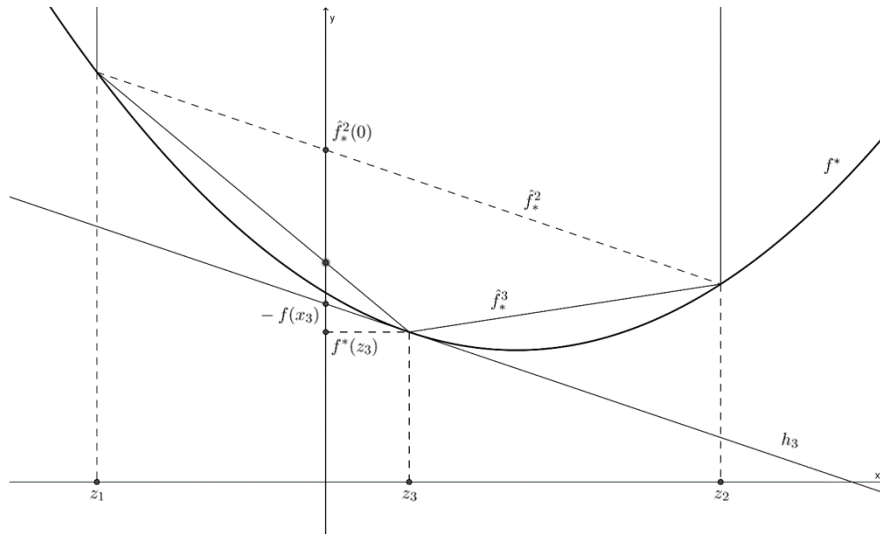


FIGURA 3.1: Algoritmo del piano di taglio duale

Infatti $x_{k+1} \in \partial \hat{f}_*^k(0)$ implica che $f^*(z_{i+1}) - z_{i+1} \cdot x_{k+1} \geq \hat{f}_*^k(0)$ per ogni $i < k$ e $x_{i+1} \in \partial f^*(z_{i+1})$ implica che $f^*(z_{i+1}) - z_{i+1} \cdot x_{i+1} = -f(x_{i+1})$. Combinando queste due disuguaglianze si ha proprio la (3.3.1):

$$z_{i+1} \cdot (x_{i+1} - x_k) \geq \hat{f}_*^k(0) + f(x_{i+1}) \geq f(x_{i+1}) - \bar{f}$$

3.5 Limitazioni del metodo

Se C non è compatto il problema $\inf\{\hat{f}^k(x) \mid x \in C\}$ potrebbe non aver soluzione, come accade nel caso in cui il bundle è $\mathcal{B}_0 = \{(x_0, z_0, f_0)\}$ con $z \neq 0$ e $C = \mathbb{R}^n$. In particolare, poiché $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \hat{f}^k(x) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$, se $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = -\infty$ non esistono bundle tali che $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \hat{f}^k(x)$ abbia soluzione.

Inoltre, esistono casi in cui anche se C è compatto e contiene il minimo la convergenza è molto lenta, richiedendo un numero di iterazioni esponenziale in n . In alcuni di questi casi l'insieme dei minimi di \hat{f}^k è n - dimensionale o $(n - 1)$ - dimensionale e ad ogni iterazione il suo volume decresce di poco, come nel seguente esempio comparso per la prima volta in [2].

Esempio 3.5.1. Sia $0 < \mu < 1$, e sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel modo seguente:

$$f(x) = \max\{0, -1 + 2\mu + \|x\|\}$$

Allora il suo sottodifferenziale è

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } \|x\| < 1 - 2\mu \\ \{x/\|x\|\}, & \text{se } \|x\| > 1 - 2\mu \\ \text{conv}\{0, x/\|x\|\} & \text{se } \|x\| = 1 - 2\mu \end{cases}$$

e l'insieme delle soluzioni è $\bar{B}_0(1 - 2\mu)$. Se $x_0 = 0$ allora necessariamente $z_0 = 0$ e $\hat{f}^0(x)$ è identicamente nulla. Sia $C = \bar{B}_0(1)$ e sia m il minimo indice (eventualmente uguale a ∞) per cui $\hat{f}^m(x) > 0$ per ogni $x \in \partial B_0(1)$. Se il metodo sceglie sempre una soluzione di norma massima per il problema approssimato, $x_{i+1} \in \partial \bar{B}_0(1)$ per tutte le iterazioni prima dell'iterazione m .

D'altra parte, dato $x_i \in \partial \bar{B}_0(1)$, $\nabla f(x_i) = x_i/\|x_i\|$, e pertanto se x_i viene visitato dall'algoritmo viene aggiunto il piano associato alla funzione affine

$$f_i(x) = -1 + 2\mu + x \cdot x_i$$

In particolare $f_i(x) > 0$ solo nella calotta sferica $V_i = \{x \in C \mid x \cdot x_i > 1 - 2\mu\}$.

Sia $S_i = V_i \cap \partial B_0(1)$. Allora

$$\bigcup_{i=1}^m S_i \supseteq \partial B_0(1)$$

Indicando con $\text{Vol}_k(A)$ il volume k -dimensionale dell'insieme A , si ha

$$\sum_{i=1}^m \text{Vol}_{n-1}(S_i) = m \text{Vol}_{n-1}(S_1) \geq \text{Vol}_{n-1}(\partial B_0(1))$$

da cui $m > \text{Vol}_{n-1}(\partial B_0(1))/\text{Vol}_{n-1}(S_1)$. Quindi servono almeno

$$\frac{\text{Vol}_{n-1}(\partial B_0(1))}{\text{Vol}_{n-1}(S_1)} \geq \frac{2}{n+1} \left(\frac{1}{4\mu} \right)^{(n+1)/2}$$

iterazioni. Inoltre, il problema che si deve risolvere all' i -esima iterazione è un problema di programmazione lineare soggetto a i vincoli.

4. Metodi Bundle

4.1 Notazione

Nella trattazione dei metodi Bundle sarà usata la stessa notazione della sezione riguardante il metodo dei piani di taglio, con alcune aggiunte.

All'iterazione k di un metodo bundle è associato un unico centro \bar{x}_k , e per semplicità di notazione \bar{x}_k e \bar{x}_{k+1} saranno indicati con \bar{x} e \bar{x}_+ rispettivamente.

\mathcal{B} indicherà un generico insieme bundle e $\hat{f}_{\mathcal{B}}$ l'approssimazione inferiore di f associata. Nella trattazione dei metodi bundle, se non altrimenti specificato \mathcal{B} e \mathcal{B}_+ indicheranno rispettivamente i bundle B_k e B_{k+1} . Per ogni $l \in \mathbb{N}$ inoltre $e_l = (1, \dots, 1)$ indicherà il vettore appartenente ad \mathbb{R}^l avente tutte le componenti pari a 1; $dist(p, X)$ indicherà la distanza tra un punto p e un insieme chiuso X ; data $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ allora $S_\varepsilon(g)$ indicherà l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq \varepsilon\}$; $z(P)$ sarà il valore ottimo del problema (P) e X l'insieme dei punti che minimizzano $f(x)$. $\partial B_x(y)$, da non confondere con un sottodifferenziale, indica il bordo della palla di raggio y e centro x .

4.2 Introduzione

Per applicare l'algoritmo del piano di taglio serve restringere il problema ad un insieme compatto. Inoltre, le soluzioni al problema master possono essere molto lontane tra un'iterazione e l'altra, e questi spostamenti possono essere causa di inefficienze nell'algoritmo. Infatti, poiché la funzione $\hat{f}_{\mathcal{B}}$ spesso approssima bene f localmente, scegliere come soluzione del master problem un punto lontano da quello corrente può portare a situazioni come quella vista nell'esempio, dove per un numero di iterazioni esponenziale in n non c'era alcun miglioramento sul valore di f .

Per questo motivo si modifica il master problem primale aggiungendo una funzione di penalizzazione che garantisca innanzitutto l'esistenza di una soluzione:

$$\phi_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = \inf\{\hat{f}_{\mathcal{B}}(\bar{x} + d) + D_t(d) \mid d \in \mathbb{R}^n\} \quad (4.2.1)$$

dove per ogni $t > 0$ $D_t(d)$ gode di proprietà che verranno analizzate nella prossima sezione.

4.3 Proprietà funzione di penalizzazione

Per le dimostrazioni di convergenza presentate in questo articolo è necessario che per ogni $t > 0$ la funzione di penalizzazione D_t sia convessa e continua. In [4] vengono inoltre usate le seguenti proprietà per costruire un metodo di tipo proximal bundle convergente:

(P1) Per ogni $t > 0$, $D_t(0) = 0$ e $0 \in \partial D_t(0)$.

(P2) Per ogni $t > 0$, e $\varepsilon > 0$, $S_\varepsilon(D_t)$ è compatto e $0 \in \text{int } S_\varepsilon(D_t)$.

(P3) Per ogni $t > 0$, $\lim_{\|d\| \rightarrow \infty} \frac{D_t(d)}{\|d\|} = +\infty$.

(P4) Per ogni $t > 0$, $D_t \geq D_\tau$ per ogni $\tau \geq t$.

(P5) $\lim_{t \rightarrow \infty} D_t(d) = 0 \forall d$.

Come viene dimostrato in [4], queste condizioni sono equivalenti alle seguenti condizioni su D_t^* :

(P*1) Per ogni $t > 0$, $D_t^*(0) = 0$ e $0 \in \partial D_t^*(0)$.

(P*2) Per ogni $t > 0$ e $\varepsilon > 0$, $S_\varepsilon(D_t^*)$ è compatto e $0 \in \text{int } S_\varepsilon(D_t^*)$.

(P*3) Per ogni $t > 0$, $\text{dom } D_t^* = \mathbb{R}^n$.

(P*4) Per ogni $t > 0$, $D_t \geq D_\tau$ per ogni $\tau \geq t$.

(P*5) Per ogni $t > 0$ e $\varepsilon > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_z \{D_t^*(z) \mid \|z\| \geq \varepsilon\} = +\infty$.

Più precisamente, in [4] viene dimostrato che per $1 \leq i \leq 4$ la proprietà (P_i) è equivalente alla proprietà (P^*i) , che $(P1)$, $(P4)$ e $(P5)$ implicano (P^*5) , e che (P^*1) , (P^*4) e (P^*5) implicano $(P5)$.

Per avere la convergenza dei metodi trattati in questa tesi è necessario aggiungere le seguenti proprietà:

(Q1) Per ogni $t > 0$, D_t è differenziabile in 0 con $\nabla D_t(0) = 0$.

(Q2) Esiste $D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tale che per ogni $t > 0$ $D_t(x) = \frac{1}{t}D(x)$.

(Q3) Per ogni $t > 0$, $D_t(x)$ è strettamente convessa.

Alcune importanti conseguenze delle proprietà appena esposte su D_t sono le seguenti:

Proposizione 4.3.1. (a) Se vale (P1) allora $D_t(x) \geq 0$ per ogni x , e se vale anche (Q3) allora $D_t(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$.

(b) Se vale (P3) allora per ogni z esiste M tale che $zx - D_t(x) < 0$ per $x \in \mathbb{R}^n/B_0(M)$.

Dimostrazione. (a) La prima implicazione è evidente perchè $0 \in \partial D_t(0)$. La seconda deriva da $D_t(0) = 0$ e dalla stretta convessità di D_t .

(b) Fissato z , si assuma per assurdo che per ogni M esista $x_M \in \mathbb{R}^n/B_0(M)$ tale che $zx_M - D_t(x_M) \geq 0$. Allora $\|z\| \geq \frac{D_t(x_M)}{\|x_M\|}$; ma questo implica l'esistenza di una successione che contraddice (P3). \square

È facile vedere come le proprietà (Q1)–(Q3) e (P1), (P3) implichino le proprietà (P1)–(P5)

Proposizione 4.3.2. (a) (Q2) \Rightarrow (P4) e (Q2) \Rightarrow (P5).

(b) (Q3), (P1) e (Q1) implicano (P2).

Dimostrazione. La (a) è evidente dalla definizione. Per la (c) invece se vale l'ipotesi allora per la proposizione 4.3.1 $D_t(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ e in particolare esiste $m > 0$ minimo di D_t ristretta a $\partial B_0(1)$. Si assuma per assurdo che esista una successione divergente $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ contenuta in $S_\varepsilon(D_t)$. La stretta convessità di D_t implicherebbe $m < \frac{\varepsilon}{\|x_i\|}$ per ogni i , assurdo. \square

Le proprietà (Q1)–(Q3) si possono riscrivere usando $D_t^*(z)$:

(Q*1) Per ogni $t > 0$, $D_t^*(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$.

(Q*2) Esiste $D^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tale che per ogni $t > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale $D_t^*(x) = \frac{1}{t}D^*(tx)$.

(Q*3) D_t^* è differenziabile per ogni $t > 0$.

Nella dimostrazione di convergenza sarà importante usare il fatto che una funzione convessa e differenziabile ha sempre differenziale continuo in $\text{dom } f$ (corollario A.2.12). In particolare, poiché D_t^* è convessa, se valgono la (P*3) e la (Q*3) allora $D_t^* \in C_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Il seguente teorema mostra l'equivalenza tra proprietà di D_t e di D_t^* .

Teorema 4.3.3. Valgono le seguenti relazioni tra le proprietà sopra elencate:

- $(Q1) \wedge (P1) \Leftrightarrow (Q^*1) \wedge (P^*1)$.
- $(Q2) \Leftrightarrow (Q^*2)$.
- Se $(P3)$ allora $(Q^*3) \Leftrightarrow (Q3)$.

Dimostrazione. $(Q1) \wedge (P1) \Rightarrow (Q^*1) \wedge (P^*1)$: $D_t^*(x) \geq 0$ per ogni x e se esiste $x \neq 0$ per il quale vale l'uguaglianza, allora $0 \in \partial D_t(x) \Rightarrow x \in \partial D_t^*(0)$, assurdo.

$(Q^*1) \wedge (P^*1) \Rightarrow (Q1) \wedge (P1)$: Poiché $0 \in \partial D_t^*(0)$ allora $0 \in \partial D_t(0)$. Se esiste $x \in \partial D_t(0)$ tale che $x \neq 0$ allora $0 \in D_t^*(x)$, da cui $D_t^*(x) = D_t^*(0) = 0$, assurdo.

$(Q2) \Leftrightarrow (Q^*2)$: Proprietà (i) delle funzioni coniugate.

Si assuma ora che $(P3)$ sia vera.

$(Q^*3) \Leftrightarrow (Q3)$: D_t e D_t^* soddisfano chiaramente le ipotesi del teorema 2.2.3. \square

Nel resto del capitolo verrà mostrato come queste proprietà siano necessarie per le dimostrazioni di convergenza.

4.4 Proprietà del master problem e funzione di merito

Le funzioni ϕ_t, δ_t , etc. definite in questo paragrafo dipendono non solo da t ma anche dal termine di stabilizzazione D , cosa non esplicitata nei loro nomi per semplicità di notazione.

Siccome $\hat{f}_{\mathcal{B}}$ è sempre per definizione un'approssimazione inferiore di f , la funzione $\phi_{\mathcal{B},t}$ è un'approssimazione inferiore di

$$\phi_t(\bar{x}) = \inf\{f(\bar{x} + d) + D_t(d) \mid d \in \mathbb{R}^n\} \quad (4.4.1)$$

Questa funzione ϕ_t è interessante per diversi motivi. Come prima osservazione, se valgono la $(P1)$ e $D_t(d) > 0$ per ogni $d \neq 0$, allora l'insieme dei minimi di $\phi_t(\bar{x})$ è uguale all'insieme dei minimi di f , quindi minimizzare f equivale a minimizzare ϕ_t , ovvero ϕ_t è una funzione di merito per il problema originale. Notare che se valgono la $(P1)$ e la $(Q3)$ allora per la proposizione 4.3.1 l'ipotesi $D_t(d) > 0$ per ogni $d \neq 0$ è valida. Inoltre ϕ_t è convessa, essendo inf-convoluzione di due funzioni convesse. Se f è convessa e chiusa e valgono $(Q1)$ e $(P1)$ allora è facile verificare che

$$\phi_t(x) \leq f(x) \text{ e } \phi_t(x) = f(x) \Leftrightarrow x \in \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}\{f(x)\} \quad (4.4.2)$$

L'idea fondamentale dei metodi bundle proximal è in effetti quella di considerare la direzione d^* soluzione del problema (4.2.1) come direzione di discesa candidata. Ma d^*

approssima la soluzione \bar{d} del problema (4.4.1), che è una direzione di discesa sia per f che per ϕ_t .

Un caso particolare molto studiato è quello in cui $D_t(d) = \frac{1}{2t}\|d\|^2$. In questo caso scegliere la soluzione \bar{d} del problema (4.4.1) come direzione di discesa equivale a fare un algoritmo di discesa secondo gradiente. Più precisamente, se f è convessa e propria $\phi_t(\bar{x})$ è detta regolarizzazione di Moreau - Yosida di f , ed è differenziabile con differenziale $\nabla\phi_t(\bar{x}) = \frac{1}{t}(\bar{x} - \bar{d})$ (come dimostrato in [7]), da cui $\bar{d} = \bar{x} - t\phi_t(\bar{x})$, che è la formula per la discesa secondo gradiente rispetto a $\phi_t(\bar{x})$.

D'ora in poi verrà analizzato solo il caso di D_t convessa che soddisfa (P1), specificando ogni volta le proprietà usate. Poiché $\phi_{\mathcal{B},t} \geq \phi_t$, la (4.4.2) implica che

$$\phi_{\mathcal{B},t}(x) = f(x) \Rightarrow x \in \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}\{f(x)\} \quad (4.4.3)$$

Queste relazioni motivano l'uso della funzione δ_t tale che

$$\delta_t(x) = f(x) - \phi_t(x) \quad (4.4.4)$$

come funzione di merito, visto che se vale (Q1) allora $\delta_t(x) \geq 0$ per ogni x con uguaglianza se e solo se $x \in \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} f(x)$. Dal punto di vista dell'algoritmo, δ_t non è possibile da calcolare e quindi si usa l'approssimazione $\delta_{\mathcal{B},t}(x)$. Per la (4.4.3),

$$\delta_{\mathcal{B},t}(x) = 0 \Rightarrow x \in \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}\{f(x)\}.$$

Un'altra possibile funzione di merito è $\zeta_t(x) = f(x) + \delta_t(x) = 2f(x) - \phi_t(x)$, con la sua approssimazione superiore

$$\zeta_{\mathcal{B},t}(x) = f(x) + \delta_{\mathcal{B},t}(x) = 2f(x) - \phi_{\mathcal{B},t}(x) \quad (4.4.5)$$

da cui $\zeta_{\mathcal{B},t} \geq \zeta_t \geq f$. Un possibile svantaggio rispetto a ϕ_t è che ζ_t può non essere concava o convessa, essendo somma di una funzione concava ed una convessa. Sempre per la (4.4.3) si ha chiaramente

$$\zeta_{\mathcal{B},t}(x) = f(x) \Rightarrow x \in \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}\{f(x)\} \quad (4.4.6)$$

Si assuma ora che f sia **-compatta*, ovvero che

$$e(l, L) = \sup\{\operatorname{dist}(x, X_l) \mid f(x) \leq L, X_l = f^{-1}(-\infty, l]\} < \infty \quad (4.4.7)$$

per ogni $L \geq l > \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x)\} \geq -\infty$. Vale allora una proprietà di δ_t fondamentale per le dimostrazioni di convergenza:

Teorema 4.4.1. *Se D_t soddisfa le proprietà (P1), (Q1), (Q2), (Q3), f è *-compatta e la successione $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è contenuta in $[\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ con $0 < \bar{t}_1 \leq \bar{t}_2$, allora*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_{t_i}(x_i) = 0 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad (4.4.8)$$

Dimostrazione. Sia $m = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. Si assuma per assurdo l'esistenza di una sottosuccessione $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $f(y_i) \geq L > m$ per ogni i . Sia allora l tale che $L > l > m$, e sia $h = \frac{L-l}{e(L,l)}$. Poiché $\nabla D_t(0) = 0$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $h\|d\| \geq D_{\bar{t}_1}(d)$ per ogni $x \in \bar{B}_\varepsilon(0)$, con uguaglianza se e solo se $x = 0$. Sia dunque $\delta = \min_{x \in \partial B_\varepsilon(0)} h\|d\| - D_{\bar{t}_1}(d) > 0$.

Fissato un $k \in \mathbb{N}$ sia p_k la proiezione di y_k su X_l , e sia $\lambda_1 = \frac{f(y_k)-L}{f(y_k)-l}$. Allora

$$(1 - \lambda_1)f(y_k) + \lambda_1 f(p_k) = (1 - \lambda_1)f(y_k) + \lambda_1 l = L$$

Allora $f(y_k + \lambda_1(p_k - y_k)) \leq L$, e quindi

$$\text{dist}(y_k + \lambda_1(p_k - y_k), X_l) = (1 - \lambda_1)\|y_k - p_k\| \leq e(L, l)$$

Ma allora per definizione di λ_1 questa disuguaglianza diventa

$$\frac{f(y_k) - f(p_k)}{\|y_k - p_k\|} \geq \frac{L - l}{e(L, l)} = h \quad (4.4.9)$$

Quindi, se

$$\lambda_2 = \frac{h\varepsilon}{f(y_k) - f(p_k)}$$

allora per la (4.4.9) $\lambda_2\|y_k - p_k\| \leq \varepsilon$, e infine

$$\begin{aligned} \phi_{t_k}(y_k) &\leq f(y_k + \lambda_2(p_k - y_k)) + D_{t_k}(\lambda_2\|p_k - y_k\|) \leq \\ &\leq f(y_k) + \lambda_2(f(p_k) - f(y_k)) + D_{\bar{t}_2}(\varepsilon) \leq f(y_k) - \delta \\ &\Rightarrow \delta_{t_k}(y_k) \geq \delta \end{aligned}$$

e questo ragionamento che vale per ogni k contraddice l'ipotesi $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_{t_i}(y_i) = 0$. \square

Nella dimostrazione precedente viene usato che D_t è sublineare in un intorno di 0, quindi l'ipotesi (P1) non basta e serve anche la (Q1). Invece è facile verificare che le ipotesi (Q2) e (Q3) non sono necessarie e possono essere sostituite dalle ipotesi (P2) e (P4).

Ecco infine una proposizione riguardante la monotonia di D_t^* in t che tornerà utile per studiare algoritmi nei quali t non è costante:

Proposition 4.1. *Sia $z \neq 0$, $0 < t < u$. Se D_t^* soddisfa la proprietà (P1) e la proprietà (Q2), allora $D_t^*(z) \leq D_u^*(z^*)$.*

Dimostrazione. Per la proprietà (Q2) basta dimostrare che $D^*(tz) \leq \frac{t}{u}D^*(uz)$. Posto $tz = r$ e $\frac{t}{u} = s$ questo diventa $D^*(r) \leq sD_t^*(\frac{z}{s})$, che è vero per la convessità di D^* . \square

4.5 Problema duale

Nei metodi Bundle l'insieme \mathcal{B} è definito in maniera molto più libera che nel metodo del piano di taglio visto precedentemente, dove veniva inserito esattamente un elemento in \mathcal{B} per ogni punto visitato. Il bundle \mathcal{B} sarà un insieme di coppie (z, α) tali che $z \in \partial_\alpha f(\bar{x})$. Quando il centro diventa \bar{x}_+ allora si possono aggiornare gli α con la seguente funzione di trasferimento:

$$\alpha_+ = \rho(\bar{x}, \bar{x}_+, \alpha, z) = f(\bar{x}_+) - (f(\bar{x}) - \alpha + z(\bar{x}_+ - \bar{x})) \quad (4.5.1)$$

in modo che valga ancora $\alpha_+ \in \partial_z f(\bar{x}_+)$ per ogni (z, α_+) contenuto in \mathcal{B} .

Si assuma che gli elementi di \mathcal{B} siano numerati in modo che

$$\mathcal{B} = \{(z_i, \alpha_i) \mid 1 \leq i \leq h\}$$

dove h indica il numero di elementi presenti nel bundle e non è necessariamente uguale al numero di iterazioni fatte dall'algoritmo. Per semplicità di notazione verrà usato $i \in \mathcal{B}$ al posto di $(z_i, \alpha_i) \in \mathcal{B}$.

Con questa notazione il problema primale si può riscrivere nel seguente modo:

$$\phi_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = \inf\{v + D_t(d) \mid v \geq z_i d - \alpha_i, i \in \mathcal{B}\} \quad (4.5.2)$$

Per riscrivere il problema in forma vettoriale, se

$$Z = (z_1, \dots, z_h) \in \mathbb{R}^{n \times h}, \quad \bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_h) \in \mathbb{R}^h$$

allora il problema (4.5.2) diventa $\phi_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = \inf\{v + D_t(d) \mid v e_h \geq Z d - \bar{\alpha}\} + f(\bar{x})$. Si può scrivere il problema duale usando la dualità di Fenchel (teorema 2.3.2):

$$\Delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = \inf\{\hat{f}_{\mathcal{B}}^*(z) - z\bar{x} + D_t^*(-z) \mid z \in \mathbb{R}^n\} \quad (4.5.3)$$

e usando la (3.4.5) per il calcolo di $\hat{f}_{\mathcal{B}}^*(z)$, se $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_h)$ il problema duale diventa

$$\Delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = \inf \left\{ D_t \left(- \sum_{i \in \mathcal{B}} z_i \theta_i \right) + \sum_{i \in \mathcal{B}} \alpha_i \theta_i \mid \theta \in \Delta_{|\mathcal{B}|} \right\} - f(\bar{x}) \quad (4.5.4)$$

dove per il teorema 2.3.2 $\Delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = -\phi_{\mathcal{B},t}(\bar{x})$.

Sia ora

$$\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_n^*)$$

la soluzione di (4.5.4). Si possono quindi definire α^* e z^* come:

$$z^* = \sum_{i \in \mathcal{B}} \theta_i^* z_i, \quad \alpha^* = \sum_{i \in \mathcal{B}} \theta_i^* \alpha_i$$

Chiaramente z^* è la soluzione al problema (4.5.3).

Si possono ora scrivere le relazioni tra funzioni di merito e problema duale: usando il fatto che $\Delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = -\phi_{\mathcal{B},t}(\bar{x})$ si ha

$$\delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \Delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = D_t^*(-z^*) + \alpha^* \quad (4.5.5a)$$

$$\zeta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = f(\bar{x}) + D_t^*(-z^*) + \alpha^* \quad (4.5.5b)$$

Notare infine che con la notazione vettoriale si può riscrivere la (4.5.4) come

$$\Delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = \inf\{D_t(-Z\theta) + \bar{\alpha}^\top \theta \mid \theta \in \Delta_{|\mathcal{B}|}\} - f(\bar{x})$$

4.6 Proprietà soluzioni del problema master

Usando i risultati visti sulla dualità di Fenchel si possono ricavare relazioni tra problema primale e problema duale che sono poi essenziali per la dimostrazione della convergenza dell'algoritmo.

Queste proprietà delle soluzioni, dimostrate per la prima volta in [4] non dipendono dal fatto che $\hat{f}_{\mathcal{B}}$ sia il massimo di funzioni affini, ma valgono per qualsiasi $\hat{f}_{\mathcal{B}}$ chiusa e convessa.

Proposizione 4.6.1. *Se $\hat{f}_{\mathcal{B}}$ e D_t sono due funzioni convesse e semicontinue inferiormente tali che $\text{dom } \hat{f}_{\mathcal{B}}(x + \cdot) \cap \text{int } \text{dom } D_t \neq \emptyset$, e che esistano z^* e d^* soluzioni ottime di (4.5.3) e (4.5.2) rispettivamente, allora:*

- (1) $\Delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = -\phi_{\mathcal{B},t}(\bar{x})$,
- (2) $-z^* \in \partial D_t(d^*)$ e $d^* \in \partial D_t^*(-z^*)$,
- (3) $z^* \in \partial \hat{f}_{\mathcal{B}}(x + d^*)$ e $x + d^* \in \partial \hat{f}_{\mathcal{B}}^*(z^*)$,
- (4) $\hat{f}_{\mathcal{B}}(x + d^*) + \hat{f}_{\mathcal{B}}^*(z^*) = z^*(x + d^*)$,
- (5) $D_t(d^*) + D_t^*(-z^*) = -zd^*$.

Dimostrazione. La (1) è un'applicazione del teorema 2.3.2 . Applicando la (2.3.3) ai problemi primale e duale dell'enunciato si ottiene $d^* \in \partial(\hat{f}_{\mathcal{B}}^*(z^*) - z^*x) \cap \partial D_t^*(-z^*)$ da cui $d^* \in \partial\hat{f}_{\mathcal{B}}^*(z^*) - \{x^*\}$ e quindi $x + d^* \in \partial\hat{f}_{\mathcal{B}}^*(z^*)$. Per la proprietà (7) delle funzioni coniugate (proposizione 2.2.2) queste appartenenze implicano anche le altre appartenenze della (2) e della (3). Inoltre, la (2) e la (3) insieme alla proprietà (3) delle funzioni coniugate implicano immediatamente la (4) e la (5). \square

Si noti che nel caso particolare in cui $\mathcal{B} = \{(z_1, \alpha_1)\}$ allora la soluzione a (4.5.3) è necessariamente z_1 essendo l'unico punto in cui $\hat{f}_{\mathcal{B}}^*(z) - zx + D_t^*(-z)$ è diversa da ∞ .

4.7 Il bundle primale

Oltre all'aggiunta del termine di penalizzazione nel master problem (4.2.1), esiste un'altra fondamentale differenza tra l'algoritmo del piano di taglio e la sua versione stabilizzata analizzata in [4].

Nell'algoritmo del piano di taglio si sceglie sempre come punto da visitare nell'iterazione successiva la soluzione del master problem. Nell'algoritmo del piano di taglio stabilizzato analizzato in [4] invece si deve scegliere se continuare con centro uguale a $\bar{x} + d^*$, dove d^* è soluzione di (4.2.1), oppure se proseguire con lo stesso centro. Nel primo caso si dice che l'algoritmo fa un *serious step* (abbreviato *SS*) e nel secondo caso si dice che l'algoritmo fa un *null step* (abbreviato *NS*). Sia successivamente ad un *NS* che successivamente ad un *SS* il bundle \mathcal{B} viene aggiornato aggiungendo uno $z \in \partial f(\bar{x} + d^*)$ ed il corrispondente α , in modo da avere un modello più accurato di f .

Esistono diversi criteri per scegliere se fare un *NS* o uno *SS*. In molte varianti dell'algoritmo si fa un *NS* se $\hat{f}_{\mathcal{B}}(\bar{x} + d^*) \ll f(\bar{x})$ ma $f(\bar{x} + d^*) \not\ll f(\bar{x})$, ovvero quando la diminuzione effettiva di f è molto minore della diminuzione attesa perché $\hat{f}_{\mathcal{B}}$ non è un buon modello per f nel punto $\bar{x} + d^*$.

In una variante dell'algoritmo presentata per la prima volta in [3], si elimina almeno teoricamente la decisione binaria tra (*NS*) e (*SS*) in direzione d^* , andando a scegliere il punto in $\text{conv}\{\bar{x}, \bar{x} + d^*\}$ che minimizza una certa funzione di merito.

Gli algoritmi presentati in seguito sono generalizzazioni di questa versione, e sono costruiti introducendo un bundle primale. Questo bundle è definito come $\mathcal{P} = \{(x_j, f_j) \mid 1 \leq j \leq l\}$ dove $f(x_j) = f_j$. Sia ora $\hat{\mathcal{P}} = \{x \mid \exists f \in \mathbb{R} \ (x, f) \in \mathcal{P}\}$; come per il bundle duale $(x_j, f(x_j)) \in \mathcal{P}$ verrà indicato per brevità con $j \in \mathcal{P}$. Si possono definire allora

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^{n \times l}, \quad f_v = (f_1, \dots, f_l) \in \mathbb{R}^l$$

L'idea è scegliere come \bar{x}_+ un punto che minimizza $\delta_{\mathcal{B},t}(x) = f(x) - \phi_{\mathcal{B},t}(x)$ in tutto $\text{conv } \hat{\mathcal{P}}$, ovvero risolvere il problema

$$\inf\{f(x) - \phi_{\mathcal{B},t}(x) \mid x \in \text{conv } \hat{\mathcal{P}}\} \quad (4.7.1)$$

Come visto nella sezione 4.4 sotto opportune ipotesi su D_t ed f si ha che $\delta_{\mathcal{B},t}$ è una funzione di merito; inoltre per il teorema 4.4.1 è ragionevole aspettarsi che minimizzando approssimazioni sufficientemente buone di δ_t si riesca eventualmente a minimizzare f . Avendo a disposizione i valori di f solo per i punti di $\hat{\mathcal{P}}$, serve risolvere il problema (4.7.1) in forma approssimata, ovvero serve usare un modello $f_{\mathcal{P}}$ dipendente dalle informazioni contenute in \mathcal{P} . Come sarà dimostrato a breve per una scelta opportuna di $f_{\mathcal{P}}$ il problema (4.7.1) approssimato ha una soluzione in $\hat{\mathcal{P}}$.

Convieni innanzitutto scegliere il modello $f_{\mathcal{P}}$ in modo che $f_{\mathcal{P}} \geq f$. Infatti, definendo poi l'approssimazione di $\delta_{\mathcal{B},t}$ come

$$\delta_{\mathcal{P},\mathcal{B},t}(x) = f_{\mathcal{P}}(x) - \inf\{\hat{f}_{\mathcal{B}}(x+d) + D_t(d) \mid d \in \mathbb{R}^n\} = f_{\mathcal{P}}(x) - \phi_{\mathcal{B},t}(x) \quad (4.7.2)$$

ne segue immediatamente che $\delta_{\mathcal{P},\mathcal{B},t} \geq \delta_{\mathcal{B},t} \geq \delta_t$, e il problema associato

$$\inf\{\delta_{\mathcal{P},\mathcal{B},t}(x) \mid x \in \text{conv } \hat{\mathcal{P}}\} \quad (4.7.3)$$

fornisce un'approssimazione superiore di (4.7.1). Più precisamente, poiché $\delta_{\mathcal{P},\mathcal{B},t}(x) - \delta_{\mathcal{B},t}(x) = f_{\mathcal{P}}(x) - f(x)$ si ha che

$$z(4.7.3) - z(4.7.1) \leq \sup_{x \in \text{conv } \hat{\mathcal{P}}} \{f_{\mathcal{P}}(x) - f(x)\}$$

Un'approssimazione superiore di f su $\text{conv } \hat{\mathcal{P}}$ particolarmente conveniente è

$$f_{\mathcal{P}}(x) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathcal{P}} \lambda_j f(x_j) \mid \sum_{j \in \mathcal{P}} x_j \lambda_j = x, \lambda \in \Delta_l \right\} \quad (4.7.4)$$

dove $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$. Chiaramente calcolare $f_{\mathcal{P}}(x)$ in un punto è equivalente a risolvere un problema di programmazione lineare.

Seguono alcune osservazioni prima di concludere che esiste una soluzione di (4.7.3) contenuta in $\hat{\mathcal{P}}$. Sia $g = (g_1, \dots, g_h) \in \mathbb{R}^h$, dove $h = |\mathcal{B}|$ e per ogni $1 \leq i \leq h$

$$\alpha_i = f(\bar{x}) - (z_i \bar{x} + g_i) \quad (4.7.5)$$

Il vettore g rappresenta le intersezioni tra l'asse verticale e i piani affini che si possono definire con gli elementi del bundle duale \mathcal{B} . Si può ora sfruttare la formula per il calcolo

di $\delta_{\mathcal{P},\mathcal{B},t}$ data dalla dualità di Fenchel:

$$\delta_{\mathcal{P},\mathcal{B},t}(x) = \inf\{\hat{f}_{\mathcal{B}}^*(z) - zx + f_{\mathcal{P}}(x) + D_t(-z) \mid z \in \mathbb{R}^n\} \quad (4.7.6)$$

Usando il bundle duale centrato in 0 ed il bundle primale il problema appena visto diventa un problema di minimizzazione in θ :

$$\delta_{\mathcal{P},\mathcal{B},t}(x) = \inf\{g^\top\theta - \theta^\top Z^\top x\lambda + f_{\mathcal{P}}(x) + D_t(-Z\theta) \mid \theta \in \Delta_{|\mathcal{B}|}\}$$

Grazie a questa espressione si può riscrivere (4.7.3) come un problema di minimizzazione in θ e λ simmetrico rispetto ai due bundle a meno del termine di penalizzazione:

$$\inf\{g^\top\theta - \theta^\top Z^\top \tilde{x}\lambda + f_v^\top\lambda + D_t(-Z\theta) \mid \theta \in \Delta_{|\mathcal{B}|}, \lambda \in \Delta_{|\mathcal{P}|}\} \quad (4.7.7)$$

Trovata la soluzione (θ^*, λ^*) si può centrare il bundle duale in $\tilde{x}\lambda^*$ e definire z^* e α^* in maniera completamente analoga a quanto fatto per il (4.5.4).

Fissato θ (4.7.7) diventa un problema di programmazione lineare con dominio il compatto $\Delta_{|\mathcal{P}|}$, pertanto raggiunge il valore ottimo in uno dei vertici. Questo significa che il problema di minimizzazione di $\delta_{\mathcal{P},\mathcal{B},t}$ ha come soluzione un insieme di punti che interseca l'insieme $\hat{\mathcal{P}}$ in almeno un punto. In altre parole, questo dimostra infine l'uguaglianza:

$$\inf\{\delta_{\mathcal{P},\mathcal{B},t}(\bar{x}) \mid \bar{x} \in \text{conv } \hat{\mathcal{P}}\} = \min_{1 \leq j \leq l} \delta_{\mathcal{P},\mathcal{B},t}(x_j) \quad (4.7.8)$$

Dal punto di vista computazionale questo implica che per risolvere (4.7.3) è sufficiente risolvere per ognuno dei $|\mathcal{P}|$ vertici del bundle primale un problema di difficoltà equivalente al duale del problema master (e quindi al problema master stesso).

4.8 Algoritmo non monotono con funzione di merito uguale alla funzione master

Durante l'algoritmo si assume che quando viene rimossa o aggiunta una coppia a \mathcal{B} gli indici degli elementi si aggiornino in modo che (z_i, α_i) sia l' i -esimo elemento inserito dall'algoritmo tra quelli ancora presenti in \mathcal{B} . Per il bundle primale invece x_1 sarà sempre il centro corrente, x_2 il punto candidato e gli indici dei rimanenti punti vengono cambiati ad ogni iterazione in modo che per ogni j da 1 a $|\mathcal{P}|$ esista $(x_j, f_j) \in \mathcal{P}$.

Poiché \bar{x} è soluzione di $\inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ se e solo se $\delta_t(x) = 0$, e poiché $\delta_{\mathcal{B},t} \geq \delta_t(x)$ indipendentemente da \mathcal{B} e da t , fissato un $\varepsilon \geq 0$ una scelta ragionevole per il criterio di stop è

$$\delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) \leq \varepsilon \quad (4.8.1)$$

Questo è un buon criterio anche per la proposizione 4.4.1, la quale assicura con qualche ipotesi aggiuntiva su f e D_t che se $\delta_t(\bar{x}_i) \rightarrow 0$ allora $f(x_i) \rightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

0. Scegliere $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $0 < t \leq \bar{t} < \infty$. Porre $d^* = 0$, $\mathcal{P} = \{(x_0, f(x_0))\}$, $\mathcal{B} = \{(z, 0)\}$ con $z \in \partial f(x_0)$.
1. Prendere come centro \bar{x} della nuova iterazione una soluzione del problema (4.7.3).
2. Calcolare un $d^* \in \partial D_t^*(-z^*)$, $x = \bar{x} + d^*$ e uno $z \in \partial f(x)$.
3. Se (4.8.1) è soddisfatta l'algoritmo termina e \bar{x} è la soluzione approssimata.
4. Porre $\mathcal{B}_+ \subseteq \mathcal{B} \cup \{(z^*, \alpha^*), (z, \alpha)\}$, $\mathcal{P}_+ \subseteq \mathcal{P} \cup \{(\bar{x}, f(\bar{x})), (x, f(x))\}$ e $0 < t_+ \leq \bar{t}$. Tornare allo step 1.

Segue qualche osservazione che motiva la ricorrenza definita con l'algoritmo:

- Per l'equazione (4.7.8) esiste sempre una soluzione del problema (4.7.3) contenuta in \hat{P} . Questo problema è non convesso, quindi a priori trovarne una soluzione può essere difficile da un punto di vista computazionale. In questo caso però per i punti contenuti in \hat{P} vale $\delta_{\mathcal{P}, \mathcal{B}, t}(x) = \delta_{\mathcal{B}, t}(x)$. Di conseguenza risolvendo nel punto 1. il problema

$$\min\{\delta_{\mathcal{B}, t}(x) \mid x \in \hat{P}\}$$

si ottiene un algoritmo che rispetta lo schema.

- L'algoritmo deve garantire la monotonia di $\delta_{\mathcal{B}, t}$. Questo comporta dei vincoli sulla scelta di t_+ e sulla definizione dei due Bundle \mathcal{B}_+ e \mathcal{P}_+ nello step 4.

Un modo per garantire questa monotonia è imporre che

$$\bar{x} \in \hat{P} \tag{4.8.2}$$

e fare in modo che $\delta_{\mathcal{B}_+, t_+}(\bar{x}) \leq \delta_{\mathcal{B}, t}(\bar{x})$, ovvero:

$$\delta_{\mathcal{B}_+, t_+}(\bar{x}) = \alpha_+^* + D_{t_+}(z_+^*) \leq \alpha^* + D_t(z^*) = \delta_{\mathcal{B}, t}(\bar{x}) \tag{4.8.3}$$

- Vengono di seguito motivate le due condizioni

$$(z^*, \alpha^*) \in \text{conv } \mathcal{B}_+ \tag{4.8.4}$$

$$t_+ \leq t \leq \bar{t} \quad (4.8.5)$$

come sufficienti per fare in modo che la (4.8.3) sia rispettata. Partendo dalla prima, in realtà basta $(z^*, \alpha^*) \in \text{conv } \mathcal{B}_+$. In questo modo infatti esiste $\theta \in \mathbb{R}^{|\mathcal{B}_+|}$ tale che $Z_+\theta = z^*$ e $\alpha_+^\top \theta = \alpha^*$, e in particolare che se si usa come bundle \mathcal{B}_+ allora $z(4.5.4) = \delta_{\mathcal{B}_+, t_+}(\bar{x}) \leq \alpha^* + D_{t_+}(z^*)$. Sotto queste ipotesi la (4.8.3) è vera se e solo se $D_{t_+}^*(z^*) \leq D_t^*(z^*)$. Per la proposizione 4.1 questo si verifica se D_t soddisfa la proprietà (Q2) e se vale la (4.8.5).

- Come sarà dimostrato in seguito, se f è strettamente convessa la condizione

$$(z, \alpha) \in \text{conv } \mathcal{B}_+ \quad (4.8.6)$$

garantisce la decrescenza stretta.

- Se f non è strettamente convessa allora l'algoritmo può non convergere anche nel caso in cui la gestione dei due bundle rispetta le regole sopra descritte. Ad esempio, se $f(x) = cx$, allora il bundle è sempre uguale a $\mathcal{B} = \{(c, 0)\}$ perché nello step 4, l'unico elemento che si può aggiungere a \mathcal{B} è appunto $(c, 0)$ essendo $\nabla f(x)$ costante. Di conseguenza, $\delta_{\mathcal{P}, \mathcal{B}, t}$ è sempre costante e uguale a $D_t^*(-c)$; pertanto l'insieme delle soluzioni è sempre $\hat{\mathcal{P}}$. Per forzare la convergenza in questo caso si può imporre che a parità di $\delta_{\mathcal{P}, \mathcal{B}, t}$ l'algoritmo selezioni un x che minimizzi f . Anche con questo accorgimento però si riescono a trovare degli esempi in cui non c'è convergenza, come sarà dimostrato in seguito.
- La gestione dei bundle si definisce *minimale* se i bundle \mathcal{P} e \mathcal{B} hanno ad ogni iterazione il numero minimo di elementi che consenta di rispettare i vincoli sopra descritti. Questo significa che ad ogni step i nuovi bundle sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\mathcal{B}_+ = \{(z^*, \alpha^*), (z, \alpha)\} \quad (4.8.7a)$$

$$\mathcal{P}_+ = \{(\bar{x}, f(\bar{x})), (x, f(x))\} \quad (4.8.7b)$$

La dimostrazione di convergenza dell'algoritmo verrà prima fatta per il caso di gestione minimale, per poi discutere quali aggiunte si possano fare ai bundle senza alterare le proprietà di convergenza trovate.

4.9 Dimostrazione di convergenza

Nel resto di questa sezione $\alpha_x^* = \rho(\bar{x}, x, z^*, \alpha^*)$ e $\alpha_x = \rho(\bar{x}, x, z, \alpha)$ dove ρ è definita dalla formula di trasferimento (4.5.1).

Per la (4.7.8) si trova sempre una soluzione al problema dello step 1 tra i vertici x_j , $1 \leq j \leq |\hat{\mathcal{P}}|$. Se vale la (4.8.7) allora per trovare il valore ottimo basta confrontare $\delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x})$ con $\delta_{\mathcal{B},t}(x)$. Usando la formulazione duale del problema master (4.5.3) si possono esprimere queste due quantità come minimi di funzioni a variabile reale. Siano infatti

$$h_1(\theta) = \theta\alpha^* + (1-\theta)\alpha + D_t^*(-z^*\theta - z(1-\theta)) \quad (4.9.1a)$$

$$h_2(\theta) = \theta\alpha_x^* + (1-\theta)\alpha_x + D_t^*(-z^*\theta - z(1-\theta)) \quad (4.9.1b)$$

e derivando

$$h_1'(\theta) = \alpha^* - \alpha + \nabla D_t^*(-z^*\theta - z(1-\theta))(z - z^*) \quad (4.9.2a)$$

$$h_2'(\theta) = \alpha_x^* - \alpha_x + \nabla D_t^*(-z^*\theta - z(1-\theta))(z - z^*) \quad (4.9.2b)$$

Allora

$$\delta_{\mathcal{B}_+,t}(\bar{x}) = \min_{\theta \in [0,1]} h_1(\theta) = m_1 \quad (4.9.3a)$$

$$\delta_{\mathcal{B}_+,t}(x) = \min_{\theta \in [0,1]} h_2(\theta) = m_2 \quad (4.9.3b)$$

Allo stesso tempo essendo \bar{x} una soluzione di (4.7.3) nello step 1 dell'algoritmo

$$\delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = \alpha^* + D_t^*(-z^*) = h_1(1) \quad (4.9.4)$$

Pertanto il miglioramento della funzione $\delta_{\mathcal{B},t}$ è almeno

$$\delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) - \delta_{\mathcal{B}_+,t}(\bar{x}_+) = \max\{h_1(1) - m_1, h_2(1) - m_2\} \quad (4.9.5)$$

La tecnica per stimare queste quantità è semplicemente la seguente: $h_1'(1)$ è positivo, come sarà dimostrato a breve, h è differenziabile e h' ammette un modulo di continuità m_h (dipendente da t). Poiché h è convessa il minimo è o $h_1(0)$ o è un $\bar{\theta}$ tale che $h_1'(\bar{\theta}) = 0$. In entrambi i casi il modulo di continuità si può usare per una stima inferiore su h' , la quale serve finalmente a dimostrare che $m_1 \geq g(h_1(1))$, con g crescente e positiva. Con h_2 è tutto analogo perché $h_1' - h_2' = k$ costante. Ecco innanzitutto il lemma che stima un modulo di continuità per $h'(\theta)$, assumendo che $D_t^*(z) = \frac{1}{t}D^*(zt)$, e usando le notazioni introdotte nella sezione B:

Lemma 4.2. *Siano $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1] \times [0, 1]$. Allora per $i = 1, 2$*

$$\|h_i'(\theta_2) - h_i'(\theta_1)\| \leq \frac{\|z - z^*\|}{t} m_{D^*}(t\|z - z^*\|\|\theta_2 - \theta_1\|) \quad (4.9.6)$$

Dimostrazione. Per la (4.9.2) , per $i = 1, 2$

$$|h'_i(\theta_2) - h'_i(\theta_1)| = (z - z^*)(D_t^*(-\theta_1 z^* + (1 - \theta_1)z) - D_t^*(-\theta_2 z^* + (1 - \theta_2)z))$$

da cui applicando la disuguaglianza di Cauchy Schwarz si ottiene la (4.9.6). \square

Per il resto dell'articolo m_{D^*} sarà indicato semplicemente con m . Dato in generale un modulo di continuità debolmente crescente p , si possono definire le due funzioni

$$M_p(\theta) = \int_0^\theta p(x) dx \quad (4.9.7a)$$

$$Q_p(\theta) = \theta p(\theta) - M_p(\theta) \quad (4.9.7b)$$

oltre all'inversa generalizzata di p chiamata p_*^{-1} e definita nella (B.0.3). Q_p è sempre non negativa perché p è debolmente crescente. È immediato verificare le seguenti formule per $k_1, k_2 > 0$:

$$o(x) = k_1 p(k_2 x) \Rightarrow M_o(x) = \frac{k_1}{k_2} M_p(k_2 x) \quad (4.9.8a)$$

$$Q_o(x) = \frac{k_1}{k_2} Q_p(k_2 x) \quad (4.9.8b)$$

Ad esempio, per quando riguarda la prima uguaglianza,

$$\int_0^\theta o(x) dx = \int_0^\theta k_1 p(k_2 x) dx = \frac{k_1}{k_2} M(k_2 \theta)$$

Per $p = m$ con queste funzioni si possono stimare m_1 ed m_2 .

Lemma 4.3. *Sia D_t^* una funzione con le proprietà (Q*1) – (Q*3) e (P*1) . Allora per ogni $L > 0$ e $I = [\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ con $0 < \bar{t}_1 \leq \bar{t}_2$ esiste $\bar{m} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ debolmente crescente e tale che per ogni istanza del problema (4.9.3), se*

$$c = \|z - z^*\| \in [0, L], \text{ e } t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2] \text{ allora } h_1(1) - m_1 \geq \bar{m}(h'_1(1)) = \bar{m}(h'_1(1)).$$

Dimostrazione. Usando la (4.6.1) da cui è immediato verificare che $h'_1(1) = \alpha_x^*$. Nel resto della dimostrazione α_x^* verrà indicato con k .

Notare che essendo D_t^* strettamente convessa e definita su tutto \mathbb{R}^n con insieme dei minimi uguale a $\{0\}$, m è strettamente crescente e quindi Q_m è strettamente positiva in $\mathbb{R}_{>0}$. Essendo $h'(\theta)$ crescente, innanzitutto per il lemma 4.2 $k - \frac{c}{t} m(tc\theta) \leq h'_1(1) - h'_1(1 - \theta) \leq k$ per $0 \leq \theta \leq 1$. Si possono ora distinguere due casi.

Sia $n_{t,c}(\theta) = \frac{c}{t} m(tc\theta)$, $\mu > 0$.

(a) $n_{t,c}(1) \leq k$. Allora

$$\begin{aligned} h_1(1) - h_1(0) &= \int_0^1 h_1'(1-x) dx \geq \int_0^1 (k - n_{t,c}(x)) dx = \\ &= (k - n_{t,c}(1)) + Q_{n_{t,c}}(1) = (k - n_{t,c}(1)) + \frac{1}{t^2} Q_m(tc) \end{aligned}$$

Sia $A_\mu = \{(k, c, t) \mid \frac{c}{t}m(tc) \leq k, t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2], k \geq \mu, c \in [0, L]\}$. Essendo $n_{t,c}(1) = \frac{c}{t}m(tc)$ continua in c e in t , A è chiuso. Sia inoltre

$$r_1(k, c, t) = (k - \frac{c}{t}m(tc)) + \frac{1}{t^2}Q_m(tc) = (k - n_{t,c}(1)) + Q_{n_{t,c}}(1)$$

funzione definita sull'insieme A_μ . Per definizione di A_μ , r_1 è strettamente positiva, e chiaramente fissati t e c è anche strettamente crescente in k .

(b) : $n_{t,c}(1) \geq k$. Allora, se $n_{t,c}(\theta) = \frac{c}{t}m(tc\theta)$ per la proprietà (4) delle inverse generalizzate (proposizione B.0.1) $n_{t,c}^{-1}(\varepsilon) = \frac{1}{tc}m_*^{-1}(\frac{t\varepsilon}{c})$ per ogni $\varepsilon \geq 0$. Sia ora $m_0 = n_*^{-1}(k)$. Per l'ipotesi (b), $n_{t,c}(m_0) = k$, quindi

$$\begin{aligned} h_1(1) - h_1(m_0) &\geq \int_0^{m_0} (k - n_{t,c}(x)) dx = Q_{n_{t,c}}(m_0) \\ &= \frac{1}{t^2}Q_m(tc m_0) = \frac{1}{t^2}Q_m(m_*^{-1}(\frac{tk}{c})) \end{aligned}$$

Sia $B_\mu = \{(k, c, t) \mid n_{t,c}(1) \geq k, t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2], k \geq \mu, c \in [0, L]\}$. Essendo $n_{t,c}(1) = \frac{c}{t}m(tc)$ continua in c e in t B è chiuso. Sia $r_2 : B \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tale che

$$r_2(k, c, t) = \frac{1}{t^2}Q_m(m_*^{-1}(\frac{tk}{c}))$$

per $c > 0$ e $r_2(k, c, t) = \infty$ per $c = 0$. Chiaramente r_2 è semicontinua inferiormente, strettamente positiva e crescente in k .

Se $(k', c', t') \in A_\mu \cap B_\mu$, allora $n_{t,c}(1) \geq k$ e da questo segue facilmente che $r_1(k', c', t') = r_2(k', c', t')$. Ma allora r_1 ed r_2 sono due funzioni semicontinue inferiormente definite su chiusi e coincidono se ristrette all'intersezione, e si può definire $r : A_\mu \cup B_\mu \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ come:

$$r(k, t, c) = \begin{cases} r_1(k, t, c) & \text{se } (k, t, c) \in A_\mu \\ r_2(k, t, c) & \text{se } (k, t, c) \in B_\mu \end{cases}$$

ed r è semicontinua inferiormente e ben definita su tutto $A_\mu \cup B_\mu = \{(k, t, c) \mid t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2], k \geq \mu, c \in [0, L]\}$, e crescente in k perché r_1 ed r_2 lo sono. Se $\bar{m}(k) = \min\{r(k, t, c) \mid t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2], c \in [0, L]\}$ per ogni $k \geq \mu$ allora $\bar{m}(k)$ è debolmente crescente e strettamente positiva perché per ogni punto è il minimo di una funzione strettamente positiva e semicontinua inferiormente in un compatto.

Infine, il ragionamento vale per ogni μ , quindi si può definire $\bar{m}(k)$ su tutto l'intervallo

$(0, \infty)$. □

Prima di passare al teorema di convergenza vero e proprio, è importante fare qualche osservazione sulla soluzione del problema (4.7.3) nel caso in cui i bundle siano minimali. Come già visto uno dei due vertici fa sempre parte dell'insieme delle soluzioni; più precisamente, poiché $\delta_{\mathcal{P}, \mathcal{B}, t}$ è concava in $\text{conv } \mathcal{P}$ per questi particolari bundle, per il lemma A.2.5 l'insieme delle soluzioni o è tutto $\text{conv } \{\bar{x}, x\}$, oppure è costituito esattamente da uno dei due vertici $\{\bar{x}, x\}$. Ecco infine un lemma tecnico che sarà di fondamentale importanza per studiare il caso in cui la successione definita dall'algoritmo è convergente:

Lemma 4.4. *Si assuma che f sia strettamente convessa e definita su tutto \mathbb{R}^n , che $\{z_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{d_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ siano limitate, che esista $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{x}_i = y$ e che $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{x,i}^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i^* = 0$. Allora anche $\lim_{i \rightarrow \infty} d_i^* = 0$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità si assumono di seguito proprietà valide a meno di sottosuccessioni. Sia \bar{d} il limite di $\{d_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$, \bar{z} il limite di $\{z_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$. Per la semicontinuità superiore del sottodifferenziale $\bar{z} \in \partial f(y)$, quindi $f(y + \bar{d}) - f(y) - \bar{z}\bar{d} > 0$ per la convessità stretta di f . D'altra parte invece per ogni i vale $f(\bar{x}_i + d_i^*) - z_i^* d_i^* + \alpha_i^* - f(\bar{x}_i) = 0$ e passando al limite si ottiene l'assurdo. □

Teorema 4.9.1. *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente convessa e Lipschitziana, $\text{dom } f = \mathbb{R}$, se la gestione dei bundle è minimale e $t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ con $0 < \bar{t}_1 \leq \bar{t}_2$, allora*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i) = 0 \text{ o } \lim_{i \rightarrow \infty} f(\bar{x}_i) = -\infty \quad (4.9.9)$$

Dimostrazione. Per prima cosa si può dimostrare la limitatezza delle successioni $\{d_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{z_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ generate dall'algoritmo. Poiché per monotonia $\{\delta_{\mathcal{B}, t}(\bar{x}_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ è limitata e per la (4.5.5) vale $\delta_{\mathcal{B}, t}(\bar{x}) = \bar{\alpha}^* + D_t(-z^*)$, allora anche $\{z_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{\alpha_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ sono limitate. Per la (4.6.1) vale $\delta_{\mathcal{B}, t}(\bar{x}) = \alpha^* - z^* d^* - D_t(d^*)$ da cui $\frac{D_t(d^*)}{\|d^*\|} < k$ costante. Quindi per la (P3) $D_t(d^*)$ è limitato e allora per la stretta convessità di D_t anche $\{d_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ è limitata. Poi usando il lemma 4.3 si può dimostrare che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{x,i}^* = 0 \quad (4.9.10)$$

Infatti, per la lipschitzianità di f tutti i sottogradienti hanno norma minore o uguale di $\frac{L}{2}$, pertanto il lemma si può applicare ottenendo l'esistenza di una funzione \bar{m} tale che $h_1(1) - m_1 \geq \bar{m}(h_1'(1)) = \bar{m}(\alpha_x^*)$. Ne segue che

$$\delta_{t_+, \mathcal{B}_+}(\bar{x}_+) - \delta_{t, \mathcal{B}}(\bar{x}) \geq \delta_{t, \mathcal{B}_+}(\bar{x}) - \delta_{t, \mathcal{B}}(\bar{x}) \geq \bar{m}(\alpha_x^*) \quad (4.9.11)$$

Ora, siccome $\delta_{\mathcal{B},t} \geq 0$ ad ogni step e \bar{m} è crescente e positiva, si ottiene la (4.9.10).

A questo punto si può dimostrare che vale anche

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i^* = 0 \quad (4.9.12)$$

Infatti $\delta_{t_+, \mathcal{B}_+}(\bar{x}_+) - \delta_{t, \mathcal{B}}(\bar{x}) \geq \delta_{t, \mathcal{B}}(x) - \delta_{t, \mathcal{B}}(\bar{x}) \geq h_2(1) - h_1(1) = \alpha_x^* - \alpha^*$. Ma allora se frequentemente $\alpha^* \geq \varepsilon > 0$ per la (4.9.10) si avrebbe $\delta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i) \rightarrow -\infty$, assurdo.

Sia $\lambda_i \in [0, 1]$ tale che all' $i + 1$ -esimo step viene selezionato $\bar{x}_i + \lambda_i d_i^*$ come centro. Si possono dunque distinguere due casi, corrispondenti ai due esiti previsti dall'enunciato:

(a) Vale

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\lambda_i d_i^*\| = \infty \quad (4.9.13)$$

Questa ipotesi implica che $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \infty$ perché $\{d_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ è limitata. Si assuma ora che esista $\varepsilon > 0$ tale che $\delta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i) > \varepsilon$ per ogni i . Per finire questo caso basta dimostrare che sotto questa ipotesi $f(\bar{x}_i) \rightarrow -\infty$.

Per la (4.9.10) fissato $c^* < 1$ definitivamente $\alpha_x^* \leq c^* \delta_{\mathcal{B},t}$. Valgono le disuguaglianze

$$f(\bar{x}) - f(x) = f(\bar{x}) - f_{\mathcal{B}^*}(\bar{x} + d^*) - (f(x) - f_{\mathcal{B}^*}(\bar{x} + d^*)) \geq (1 - c^*) \delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) \geq (1 - c^*) \varepsilon \quad (4.9.14)$$

e infine poiché $f(\bar{x}) - f_{\mathcal{P}}((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x) = \lambda(f(\bar{x}) - f(x))$ vale

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_+) = f_{\mathcal{P}}((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x) \geq \lambda(1 - c^*) \varepsilon$$

e questo risolve il caso (a).

(b) Vale

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\lambda_i d_i^*\| < \infty \quad (4.9.15)$$

In questo caso data una sottosuccessione convergente di $\{\bar{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ per la (4.9.10) e per la (4.9.12) si hanno tutte le ipotesi per applicare il lemma 4.4.

Trovata $\{d_{j(i)}^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergente a 0 allora per la (4.9.10) e per la lipschitzianità (anche solo locale) di f è immediato concludere

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i) = \alpha_i^* - d_i^* z_i^* - D_{t_i}(d_i^*) = 0 \quad \square$$

Il teorema appena dimostrato non è molto interessante dal punto di vista applicativo, perché le funzioni provenienti dalle applicazioni non sono quasi mai strettamente convesse. Inoltre la dimostrazione data non fornisce un modo semplice di stimare la velocità di convergenza.

Rimane da discutere la gestione dei Bundle. Si noti come la gestione minimale nella dimostrazione precedente venga usata solo per garantire la monotonia di $\delta_{\mathcal{B},t}$ e per la

(4.9.14). Visto che $\delta_{\mathcal{B},t}$ è monotona decrescente in \mathcal{B} a maggior ragione la dimostrazione rimane valida se \mathcal{B}_+ contiene il bundle minimale $\{(z^*, \alpha^*), (z, \alpha)\}$.

Per quanto riguarda la gestione del bundle primale serve più di attenzione. Vale la seguente proposizione:

Proposizione 4.9.2. *Con le notazioni introdotte in precedenza, si assuma che valgano le ipotesi del teorema 4.9.1 con l'unica differenza che i bundle non sono gestiti in maniera minimale. Se ad ogni step il bundle primale oltre al bundle primale minimale contiene solo punti nell'involuppo convesso dei centri già visitati, si verifica ancora la (4.9.9).*

Dimostrazione. Se nella gestione del bundle primale sono rispettate le ipotesi di questa proposizione valgono ancora la (4.9.12) e la (4.9.10). La dimostrazione del caso in cui esista una sottosuccessione di $\{\bar{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergente allora è completamente analoga al punto (b) del teorema 4.9.1. Se non ci sono sottosuccessioni convergenti (ovvero $\{\bar{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ diverge) e per assurdo $\delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) > \varepsilon$ definitivamente, allora come nel punto (a) del teorema 4.9.1 si ha definitivamente

$$f(\bar{x}) - f(x) \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.9.16)$$

Sia m il massimo indice per cui non vale la (4.9.16), sia $C = \text{conv} \{\bar{x}_i \mid 0 \leq i \leq m\}$, e sia $M = \max_{x \in C} f(x)$. Sia inoltre $N = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|d_i^*\| < +\infty$. Si dimostrerà ora per induzione che per ogni $i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ vale

$$f(\bar{x}_{m+i}) + \frac{\varepsilon}{2N} \text{dist}(\bar{x}_{m+i}, C) \leq M \quad (4.9.17)$$

Chiaramente questa equazione è vera per ogni $\bar{x} \in C$ e in particolare per \bar{x}_m , e questo dimostra il passo base.

Passo induttivo: per i nuovi punti tentativo vale $\text{dist}(x, C) \leq \text{dist}(\bar{x}, C) + \|d^*\| \leq \text{dist}(\bar{x}, C) + N$ e $f(x) \leq f(\bar{x}) - \frac{\varepsilon}{2}$. Queste due relazioni e l'ipotesi induttiva su \bar{x} implicano la (4.9.17) per il punto tentativo. Infine, \bar{x}_+ appartiene all'involuppo convesso dell'insieme formato dai centri già visitati unito al nuovo punto tentativo; ma la funzione $x \mapsto f(x) + \frac{\varepsilon}{2N} \text{dist}(x, C)$ è convessa, quindi i suoi sottolivelli sono convessi, e questo completa l'induzione.

Dato che la (4.9.17) vale per tutti i punti della successione $\{\bar{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, e questa successione diverge, $f(\bar{x}_i) \rightarrow -\infty$. \square

Se f è $*$ -compatta il teorema appena dimostrato garantisce la convergenza a $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

Corollario 4.9.3. *Se in aggiunta alle ipotesi del teorema 4.9.1 la funzione f è $*$ -compatta allora*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(\bar{x}_i) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

Dimostrazione. La tesi è banalmente verificata se $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = -\infty$.

Se $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_{B_i, t_i}(\bar{x}_i) = 0$ allora si può applicare il teorema 4.4.7, e in particolare $\lim_{i \rightarrow \infty} f(\bar{x}_i) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. \square

Esempio 4.9.1. Siano $k, h > 0$ e sia $f(x, y) = -kx + h|y|$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e sia $D_t(d) = \frac{t}{2}\|d\|^2$ per ogni t, d . È facile verificare che $D_t(d)$ soddisfa (Q1) – (Q3) e (P1), (P3) per ogni t ; si assuma inoltre $t_i = 1$ per ogni i , in modo che $D_{t_i}(d) = D_1(d) = D_1^*(d) = \frac{1}{2}\|d\|^2$ per ogni i . Il sottodifferenziale di f è dato dalla seguente espressione:

$$\partial f(x, y) = \begin{cases} \{(-k, h)\}, & \text{se } y > 0 \\ \{(-k, -h)\}, & \text{se } y < 0 \\ \text{conv}\{(-k, -h), (-k, h)\} & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Innanzitutto si osservi che siccome $D_1(d^*) = \frac{1}{2}\|d\|^2$ allora

$$-z^* \in \partial D_1(d^*) \Rightarrow -z^* = \nabla \frac{1}{2}\|d^*\|^2 = d^* \quad (4.9.18)$$

Si assuma infine $\bar{x}_0 = (0, 0)$, $z_0^* = (-k, \frac{h}{2})$, $\alpha_0^*(x_0) = \varepsilon_0$, con $0 < \varepsilon < \frac{h^2}{4}$. Come prima conseguenza, $x_0 = \bar{x}_0 + d_0^* = (k, -\frac{h}{2})$ e $z_0 = (-k, -h)$. Si può ora dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 4.9.4. Se in aggiunta alle ipotesi appena descritte i bundle vengono gestiti in maniera minimale, per ogni i $\bar{x}_i = \bar{x}_0 = (0, 0)$.

Dimostrazione. Si può procedere per induzione dimostrando che per ogni i valgono le seguenti proprietà:

- (1) $\bar{x}_i = (0, 0)$
- (2) $z_i^* = (-k, (-1)^i ch)$, con $0 < c \leq \frac{1}{2}$
- (3) $\alpha_i^*(x_0) = \varepsilon_i$ con $0 < \varepsilon_i < \varepsilon_{i-1}$
- (4) $x_i = (k, (-1)^{i+1} ch)$, $z_i = (-k, (-1)^{i+1} h)$

Innanzitutto, la proprietà (4) è una conseguenza delle prime (3) per la (4.9.18), e per $i = 0$ tutte le proprietà sono verificate.

$i \Rightarrow i + 1$: Chiaramente se un'iterazione verifica le proprietà (1) – (4) allora per la (4) innanzitutto $\alpha = \alpha_x = 0$. Inoltre $\alpha_x^* = f(x) - (-\varepsilon + x \cdot z^*) = \varepsilon + h^2(c + c^2) > \varepsilon = \alpha^*$

Quindi, se $\alpha_1 = \alpha^*$ e $\alpha_2 = \alpha_x^*$

$$\begin{aligned} h_1(\theta) &= \theta\alpha_1 + \frac{1}{2}\|\theta(-z^*) + (1-\theta)(-z)\|^2 \\ h_2(\theta) &= \theta\alpha_2 + \frac{1}{2}\|\theta(-z^*) + (1-\theta)(-z)\|^2 \end{aligned} \quad (4.9.19)$$

da cui

$$h_1(1) - h_2(1) = h'_1 - h'_2 = \alpha_1 - \alpha_2 < 0 \quad (4.9.20)$$

Per $j = 1, 2$ il θ_j che minimizza h_j è dato da

$$\theta_j = \frac{-\alpha_j + h^2(1+c)}{h^2(1+c)^2} \quad (4.9.21)$$

Quindi $\theta_2 = \frac{-\varepsilon + (1-c)h^2}{h^2(1+c)^2}$ per cui $0 < \theta_2 < 1$ perché per ipotesi $0 < c \leq \frac{1}{2}$, e $\varepsilon < \frac{h^2}{4}$. È facile allora integrando la (4.9.20) da 1 a θ_2 verificare che $m_2 > m_1$, e che quindi $\bar{x}_+ = \bar{x}$; in particolare, questo completa l'induzione per quanto riguarda la (1).

Dalla (4.9.21) segue anche

$$0 < -\frac{1}{4(c+1)^2} + \frac{1}{c+1} \leq \theta_1 < \frac{1}{c+1} < 1 \quad (4.9.22)$$

ed essendo $\alpha_+^* = \theta_1\alpha_1 < \alpha_1 = \varepsilon$ questo conclude l'induzione anche per quanto riguarda la proprietà (3).

Inoltre

$$z_+^* = \theta_1 z^* + (1 - \theta_1)z = (-k, (-1)^i h((c+1)\theta_1 - 1))$$

e per la disuguaglianza (4.9.22) appena vista $z_+^* = (-k, (-1)^{i+1}c_+h)$, con $0 < c_+ \leq \frac{1}{2}$, e questo conclude l'induzione anche sulla proprietà (2). \square

4.10 Algoritmo bundle non monotono con funzione di merito generica

Come visto nella sezione precedente, l'algoritmo che usa $\delta_{\mathcal{B},t}$ come funzione di merito talvolta non converge perché in alcuni casi, come in quello della funzione lineare o dell'esempio 4.9.1, $f(x) \ll f(\bar{x})$ ma $\delta_{\mathcal{B},t}(x) \approx \delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x})$, e l'algoritmo può quindi trascurare un miglioramento "significativo" su f per avere un miglioramento poco significativo su $\delta_{\mathcal{B},t}$. Come sarà dimostrato in questa sezione, se la funzione di merito è $\zeta_{\mathcal{B},t}$ (vedere (4.4.5)) l'algoritmo converge sotto ipotesi meno restrittive. In particolare, converge anche per funzioni non strettamente convesse e per qualsiasi gestione del bundle primale.

Definita l'approssimazione superiore di $\zeta_{\mathcal{B},t}$ come

$$\zeta_{\mathcal{P},\mathcal{B},t}(\bar{x}) = 2f_{\mathcal{P}}(\bar{x}) - \phi_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) = f_{\mathcal{P}}(x) + \bar{\delta}_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) \quad (4.10.1)$$

L'algoritmo è completamente analogo a quello definito nella sezione precedente, a meno della funzione di merito $\zeta_{\mathcal{B},t}$.

In questa sezione la funzione di merito è generica nel senso che tutte le dimostrazioni valgono anche per funzioni di merito del tipo

$$\zeta_{\mathcal{B},t}^{\lambda}(\bar{x}) = \delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) + \lambda f(\bar{x})$$

con $\lambda \in (0, +\infty)$.

Di seguito \mathcal{B}^* indicherà il bundle banale $\{(z^*, \alpha^*)\}$.

0. Scegliere $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $0 \leq t \leq \bar{t} < \infty$. Porre $d^* = 0$, $\mathcal{B} = (z_0^*, \alpha_0^*)$, $\mathcal{P} = \{(\bar{x}_0, f(\bar{x}_0))\}$.

1. Trovare il centro \bar{x} soluzione del problema:

$$\min\{\zeta_{\mathcal{P},\mathcal{B},t}(\bar{x}) \mid \bar{x} \in \text{conv } \hat{\mathcal{P}}\}$$

2. Risolvere (4.5.4) per un bundle duale $\mathcal{B}' \supseteq \mathcal{B}$ trovando la soluzione θ^* . Calcolare z^* e un $d^* \in \partial D_t^*(-z^*)$, $x = \bar{x} + d^*$ e $z \in \partial f(x)$.

3. Scegliere \mathcal{B}_+ contenente $\{(z^*, \alpha^*), (z, \alpha)\}$, \mathcal{P}_+ contenente $\{(\bar{x}, f(\bar{x})), (x, f(x))\}$, e $0 < t_+ \leq \bar{t}$. Tornare allo step 1.

Un'altra variante è il fatto che il problema (4.5.4) viene risolto rispetto ad un bundle ausiliario \mathcal{B}' invece che rispetto al bundle \mathcal{B} , in modo riuscire a trovare una soluzione che approssimi meglio $\delta_t(\bar{x})$. Notare che il problema dello step 1. è non convesso, quindi computazionalmente difficile: è ragionevole allora usare un bundle più grande per il problema dello step 2., che è più facile. È possibile applicare questa variante anche al primo algoritmo senza avere cambiamenti nella dimostrazione di convergenza.

La gestione dei bundle minimale è quella dove tutte le inclusioni descritte dall'algoritmo diventano uguaglianze. Come anticipato, si noti che \mathcal{P}_+ può contenere punti anche fuori dall'involuppo convesso dei centri già visitati

Sia ora $\Delta_{\zeta} = \zeta_{\mathcal{B}',t}(\bar{x}) - \zeta_{\mathcal{B}_+,t_+}(\bar{x}_+)$. Poiché $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ se la gestione dei bundle è minimale e $\zeta_{\mathcal{B},t}$ è monotona in t , in seguito si userà che $\Delta_{\zeta} \geq \zeta_{\mathcal{B}',t}(\bar{x}) - \zeta_{\mathcal{B}_+,t}(\bar{x}_+)$. La tecnica usata

sarà la seguente: dimostrare che $\Delta_\zeta \geq \bar{n}(\delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}))$ con $\bar{n} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ non decrescente, e che quindi o $\zeta_{\mathcal{B},t}$ (e di conseguenza ζ_t) tende a $-\infty$ o $\delta_{\mathcal{B},t}$ (e di conseguenza δ_t) converge a 0.

Con questa tecnica si riesce a limitare dal basso ad ogni step la diminuzione della funzione di merito. Pertanto si presta più facilmente a stime sull'efficienza dell'algoritmo rispetto alla tecnica usata nella sezione precedente, che dimostrava solo $\delta_{\mathcal{B},t} < \varepsilon$ definitivamente, senza fornire un modo evidente di stimare la velocità di diminuzione della funzione di merito.

Teorema 4.10.1. *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è Lipschitziana, $\text{dom } f = \mathbb{R}$, se la gestione dei bundle è minimale e $t \in [\bar{t}_1, \bar{t}_2]$ con $0 < \bar{t}_1 \leq \bar{t}_2$, allora*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i) = 0 \text{ o } \lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i) = -\infty$$

.

Dimostrazione. $\zeta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) - \zeta_{\mathcal{B}_+,t}(\bar{x}_+) = \delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) - \delta_{\mathcal{B}_+,t}(\bar{x}_+)$. Vale anche in questo caso la (4.9.11), quindi

$$\Delta_\zeta \geq \bar{m}(\alpha_x^*) \quad (4.10.2)$$

Fissato $0 < c^* < \frac{1}{2}$, si possono distinguere due casi:

(a): $\alpha_x^* \geq c^* \delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x})$. Allora per la (4.10.2) si ha che

$$\Delta_\zeta \geq \bar{m}(c^* \delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x})) \quad (4.10.3)$$

(b): $\alpha_x^* < c^* \delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x})$. In questo caso si può dimostrare che

$$\zeta_{\mathcal{B}',t}(\bar{x}) - \zeta_{\mathcal{B}',t}(x) \geq \zeta_{\mathcal{B}',t}(\bar{x}) - \zeta_{\mathcal{B}^*,t}(x) \geq (1 - 2c^*) \delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) \quad (4.10.4)$$

Questo perché

$$f(\bar{x}) - f(x) = f(\bar{x}) - f_{\mathcal{B}^*}(\bar{x} + d^*) - (f(x) - f_{\mathcal{B}^*}(\bar{x} + d^*)) \geq (1 - c^*) \delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x})$$

e vale anche

$$\delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}) - \delta_{\mathcal{B}',t}(x) \geq h_1(1) - h_2(1) = \alpha^* - \alpha_x^* \geq -c^* \delta_{\mathcal{B},t}$$

da cui la (4.10.4) segue sommando.

Per concludere, unendo i risultati del caso (a) e del caso (b) si ha

$$\Delta_\zeta \geq \min\{(1 - 2c^*) \delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}), \bar{m}(c^* \delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}))\} = \bar{n}(\delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x})) \quad (4.10.5)$$

e siccome \bar{n} è una funzione crescente e strettamente positiva su $\mathbb{R}_{>0}$, questo dimostra la tesi. \square

Se f è $*$ -compatta, vale un risultato analogo al corollario 4.9.3.

Corollario 4.10.2. *Se in aggiunta alle ipotesi del teorema 4.10.1 la funzione f è $*$ -compatta allora*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

Dimostrazione. Se $\lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i) = -\infty$ allora poiché $\delta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i)$ è limitata e $\zeta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i) = f(\bar{x}_i) + \delta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i)$ vale anche $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = -\infty = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

Se $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i) = 0$ allora per il teorema 4.4.7 $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$, e quindi $\lim_{i \rightarrow \infty} \zeta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i) = f(x_i) + \delta_{\mathcal{B}_i, t_i}(\bar{x}_i) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$. \square

In questo caso è facile generalizzare il corollario appena enunciato per funzioni convesse vincolate ad un poliedro X . Sia f_X tale che $f_X(x) = f(x) + \mathbb{1}_X$, dove $\mathbb{1}_X$ è la funzione indicatrice di X uguale a 0 in X e a ∞ nel resto di \mathbb{R}^n . Sia ora

$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \gamma_i \geq g_i x, i \in \mathcal{V}\}$. Allora problemi master duale e primale diventano

$$\phi_{\mathcal{B}, t}(\bar{x}) = \inf\{v + D_t(d) \mid v \geq z_i d - \alpha_i \ i \in \mathcal{B}, 0 \geq g_i d - \bar{\gamma}_i \ i \in \mathcal{V}\}, \quad (4.10.6a)$$

$$\Delta_{\mathcal{B}, t}(\bar{x}) = \inf\{D_t\left(\sum_{i \in \mathcal{B}} z_i \theta_i + \sum_{i \in \mathcal{V}} g_i \mu_i\right) + \sum_{i \in \mathcal{B}} \alpha_i \theta_i + \sum_{i \in \mathcal{V}} \bar{\gamma}_i \mu_i \mid \theta \in \Delta_{\mathcal{B}}, \mu \geq 0\}, \quad (4.10.6b)$$

dove $\bar{\gamma}_i = -g_i x + \gamma_i$. Sia (θ^*, μ^*) soluzione del problema (4.10.6).

L'algoritmo risolve tutti i problemi ristretti ad X , o in altre parole mantiene sempre i vincoli $0 \geq g_i d - \bar{\gamma}_i$. Questo è necessario per fare in modo che valga sempre $\hat{P} \subset X$ e in particolare che per tutti i punti del bundle primale esista un sottogradiente.

Siano $\bar{\gamma}^* = \sum_{i \in \mathcal{V}} \bar{\gamma}_i \mu_i^*$, e $\bar{g} = \sum_{i \in \mathcal{V}} g_i \mu_i^*$. Allora poiché $\bar{g} \in \partial_{\bar{\gamma}^*} \mathbb{1}(\bar{x})$, e $z^* \in \partial_{\alpha^*} f(\bar{x})$, se $\bar{z}^* = z^* + \bar{g}$ e $\bar{\alpha}^* = \alpha^* + \gamma^*$ si ha che $\bar{z}^* \in \partial_{\bar{\alpha}^*} (f + \mathbb{1})(\bar{x}) = \partial_{\bar{\alpha}^*} f_X(\bar{x})$. Si possono quindi ancora aggregare gli elementi del Bundle duale, inserendo nel nuovo Bundle l'elemento $(\bar{z}^*, \bar{\alpha}^*)$. Questa osservazione è fondamentale per il seguente corollario:

Corollario 4.10.3. *Se f rispetta le ipotesi del corollario 4.10.2, allora tale corollario vale anche per f_X .*

Dimostrazione. La soluzione del problema risolto nello step 1 dell'algoritmo sta in $\text{conv } \hat{P}$ e in particolare in X . Nello step 2 i vincoli del poliedro vengono lasciati nel problema master quando si calcola il punto tentativo; di conseguenza, anche il punto tentativo sta in X . Dopo aver calcolato il punto tentativo si possono come osservato aggregare tutte le condizioni del master primale (vincoli compresi) nell'elemento $(\bar{z}^*, \bar{\alpha}^*)$. Allora

Da questo punto in poi l'analisi è completamente analoga a quella fatta nel caso non vincolato. □

5. Conclusioni

5.1 Cenni su stime di efficienza

Si cerca in questa sezione di generalizzare i risultati di [3] per l'algoritmo esposto nella sezione 4.10. La maggior difficoltà sta nel fatto che nella stima (4.10.5) della diminuzione di $\zeta_{\mathcal{B},t}$

$$\Delta_\zeta \geq \min\{(1 - 2c^*)\delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}), \bar{m}(c^*\delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}))\}$$

la funzione \bar{m} non è convessa, quindi non si può linearizzare.

La stima di efficienza dipende dal diametro R del dominio nel quale avvengono le iterazioni (che può essere ad esempio il diametro di un insieme di livello visto che $\{f(\bar{x}_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ è limitata), dalla costante L di Lipschitz della funzione f , dalla funzione di penalizzazione D e dalla precisione ε^* richiesta.

Notare che se $f^* = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ allora per richiedere precisione ε^* si intende fermare l'algoritmo quando

$$\Delta f_i^* = f(\bar{x}_i) - f^* \leq \varepsilon^* \quad (5.1.1)$$

Serve quindi calcolare un $\varepsilon(\varepsilon^*, D, t, R)$ tale che se il criterio di stop dell'algoritmo

$$\delta_{\mathcal{B},t} \leq \varepsilon(\varepsilon^*, D, t, R) \quad (5.1.2)$$

è soddisfatto, allora vale la (5.1.1).

Per fare questo si può definire la funzione $O_D : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che

$$O_D(\lambda, f) = \inf_{d \in \partial B_0(f)} \sup_{y \in [0,1]} \lambda f y - D(dy) \quad (5.1.3)$$

Vale la seguente proposizione:

Proposizione 5.1.1. (a) $O_D(\lambda, f)$ è strettamente crescente in λ per $f \neq 0$.

(b) Se D soddisfa (P1) e (Q1) allora $O_D(\lambda, f)$ è non negativa con $O_D(\lambda, f) = 0$ solo se $\lambda f = 0$.

(c) Se $k > 1$ allora $O_D(\frac{\lambda}{k}, fk) \leq O_D(\lambda, f)$.

Dimostrazione. Si tratta di una facile verifica. Segue ad esempio la dimostrazione del punto (c). Notando che $D_t(dy)$ è strettamente crescente in y per ogni $d \neq 0$, si ha che se $k > 1$ allora

$$\lambda \|d\|y - D_t(dy) \geq \lambda \|d\|y - D_t(dky) = \frac{\lambda}{k}dky - D_t(dky)$$

e applicando $\inf_{d \in \partial B_0(\|d\|)} \sup_{y \in [0,1]}$ su entrambi i lati della disuguaglianza segue (c). \square

Se D soddisfa (P3) allora per f abbastanza grande $O_D(\cdot, f)$ coincide con la più semplice $n_D : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ tale che

$$n_D(\lambda) = \inf_{d \in \partial B_0(1)} \sup_{y \in \mathbb{R}_{\geq 0}} \lambda y - D(dy) \quad (5.1.4)$$

Vale la seguente proposizione:

Proposizione 5.1.2. (a) n_D è debolmente crescente.

(b) Se D soddisfa (P1) e (Q1), allora $n_D(0) = 0$, $n_D(\lambda) > 0$ per ogni $\lambda > 0$.

(c) Se D_t soddisfa (Q2) per ogni $t > 0$ si ha $n_{D_t} = \frac{1}{t}n_D(t\lambda)$.

(d) Se oltre alle proprietà del punto (a) D soddisfa anche (P3), allora n_D è finita ovunque, strettamente crescente e continua.

Anche in questo caso la dimostrazione è una semplice verifica.

Sia x^* tale che $f(x^*) = f^*$. Si consideri l'approssimazione superiore di f definita su $\text{conv}\{x^*, \bar{x}_i\}$ come $\bar{f}((1-\lambda)\bar{x}_i + \lambda x^*) = (1-\lambda)f(\bar{x}_i) + \lambda f(x^*) = f(\bar{x}_i) - \lambda \Delta f_i^*$. Allora

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{B},t}(\bar{x}_i) &= f(\bar{x}_i) - \inf_{d \in \mathbb{R}^n} (f_{\mathcal{B}}(\bar{x}_i + d) + D_t(d)) = \\ &= \sup_{d \in \mathbb{R}^n} f(\bar{x}_i) - f_{\mathcal{B}}(\bar{x}_i + d) - D_t(d) \geq \sup_{d \in \text{conv}\{x^*, \bar{x}_i\}} f(\bar{x}_i) - \bar{f}(\bar{x}_i + d) - D_t(d) = \\ &= \sup_{\lambda \in [0,1]} f(\bar{x}_i) - \bar{f}((1-\lambda)\bar{x}_i + \lambda x^*) - D_t(\lambda(x^* - \bar{x}_i)) = \sup_{\lambda \in [0,1]} \lambda \Delta f_i^* - D_t(\lambda(x^* - \bar{x}_i)) \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in [0,1]} \lambda \Delta f_i^* - D_t(\lambda(x^* - \bar{x}_i)) &\geq \inf_{d \in \partial B_0(\|x^* - \bar{x}_i\|)} \sup_{\lambda \in [0,1]} \lambda \|x^* - \bar{x}_i\| \frac{\Delta f_i^*}{\|x^* - \bar{x}_i\|} - D_t(\lambda d) = \\ &= O_D\left(\frac{\Delta f_i^*}{\|x^* - \bar{x}_i\|}, \|x^* - \bar{x}_i\|\right) \geq O_D\left(\frac{\Delta f_i^*}{R}, R\right) \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è vera per il punto (c) della 5.1.1. Ne segue che se $\delta_{\mathcal{B},t}$ è minore o uguale di $O_{D_t}(\frac{\varepsilon^*}{R}, R)$ per la stretta crescita nel primo argomento di O_D si ha

$\Delta f_i^* \leq \varepsilon^*$, o in altre parole $\varepsilon(\varepsilon^*, D, t, R) = O_{D_t}(\frac{\varepsilon^*}{R}, R)$.
 R è generalmente molto grande rispetto a $\frac{\varepsilon^*}{R}$, e se

$$l(R) = \inf_{d \in \partial B_0(R)} \frac{D(d)}{R\varepsilon^*} \quad (5.1.5)$$

e vale (P3) allora $O_{D_t}(\frac{\varepsilon^*}{R}, R) = n_{D_t}(\frac{\varepsilon^*}{R}) = \frac{1}{t}n_D(\frac{t\varepsilon^*}{R})$ per ogni

$$t \leq l(R) \quad (5.1.6)$$

Nel resto della sezione si assumerà $t_i = t$ costante per ogni i , e per semplicità di notazione ε indicherà $\varepsilon(\varepsilon^*, D, t, R)$. Sia ora $E : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che

$$E_t(y) = \sup_{\|z\|=y} D_t^*(d)$$

Valgono le ovvie stime

$$\Delta f_0^* \leq LR \quad (5.1.7a)$$

$$\delta_{B_0,t}(\bar{x}_0) \leq E_t(L) \quad (5.1.7b)$$

Sia i^* l'iterazione finale dell'algoritmo. Per tutte le iterazioni i prima di i^* si avrà $\Delta f_i^* \geq 0$ e $\delta_{B_i,t} \geq \varepsilon$, da cui se

$$\zeta_{B_0,t} - \zeta_{B_i,t} \geq LR + E_t(L) - \varepsilon \quad (5.1.8)$$

allora $i = i^*$ e l'algoritmo termina. Come già osservato in [3], poiché $\zeta_{B,t}$ diminuisce di una funzione crescente in $\delta_{B,t}$ il caso peggiore è quello in cui prima decresce la componente $\delta_{B,t}$ e poi decresce la componente f , il tutto più lentamente possibile.

Come già accennato a questo punto il problema è che \bar{m} non si può linearizzare, quindi ci si deve accontentare della stima ovvia $\bar{m}(c^*\delta_{B,t}) \geq \bar{m}(c^*\varepsilon)$. Nella prima fase, la decrescita geometrica data da $\delta_{B_+} = (1 - 2c^*)\delta_B$ è più lenta solo se $\delta_B \leq \frac{\bar{m}(c^*\varepsilon)}{2c^*}$. Ricordando che nel lemma 4.3 \bar{m} è definita come inf di funzioni continue che si possono scrivere esplicitamente in funzione del modulo di continuità m_{D^*} , per la formula appena vista sembra sensato assumere che le iterazioni con decrescita geometrica siano solo un $O(1)$.

In tutto il resto della prima fase $\delta_{B,t}$ decresce di almeno $\bar{m}(c^*\varepsilon)$, quindi la complessità di questa fase è $O(\frac{E_t(L)}{\bar{m}(c^*\varepsilon)})$.

Nella seconda fase f decresce ad ogni step di almeno $\min\{(1 - 2c^*)\varepsilon, \bar{m}(c^*\varepsilon)\}$, quindi la complessità è $O(LR(\frac{1}{(1-2c^*)\varepsilon} + \frac{1}{\bar{m}(c^*\varepsilon)}))$.

Per finire allora la complessità totale è

$$O\left(\frac{E_t(L)}{\bar{m}(c^*\varepsilon)} + LR\left(\frac{1}{(1-2c^*)\varepsilon} + \frac{1}{\bar{m}(c^*\varepsilon)}\right)\right) \quad (5.1.9)$$

Se la successione dei t_i è decrescente e contenuta in un intervallo $[t_1, t_2]$, allora si può usare la monotonia in t di n_{D_t} e di $\delta_{B,t}$ per concludere che in questo caso la convergenza è sicuramente più veloce di quello in cui $t_i = t_1$ per ogni i .

Nel caso in cui

$$D_t = \frac{1}{2t} \|d\|^2$$

allora

$$\bar{m}(\delta) = \frac{\delta^2}{2tL^2}, \quad n_{D_t}(\lambda) = \frac{t\lambda^2}{2R^2} \quad (5.1.10)$$

Si assuma che valga la (5.1.6), ovvero $t \leq \frac{R^2}{2\varepsilon}$. La (5.1.9) ignorando le costanti diventa

$$O\left(\frac{L^2 R^4}{(\varepsilon^*)^4} + \frac{L^3 R^5}{t(\varepsilon^*)^4}\right)$$

Questa stima è minima quando t è uguale al massimo possibile $\frac{R^2}{2\varepsilon}$, nel qual caso diventa

$$O\left(\frac{L^2 R^4}{(\varepsilon^*)^4} + \frac{L^3 R^3}{(\varepsilon^*)^3}\right)$$

Nella stima fatta in [3] per lo stesso algoritmo il primo addendo $\frac{L^2 R^4}{(\varepsilon^*)^4}$, che corrisponde alla fase in cui si diminuisce $\delta_{B,t}$, non compare. Questo perché nel caso particolare di $D_t(d) = \frac{1}{2t} \|d\|^2$ si può sfruttare la convessità di \bar{m} e sostituire la stima $\bar{m}(c^* \delta_{B,t}) \geq \bar{m}(c^* \varepsilon)$ qui usata con la più stretta $\bar{m}(c^* \delta_{B,t}) \geq \frac{\delta_{B,t}}{\varepsilon} \bar{m}(c^* \varepsilon)$.

5.2 Possibili sviluppi

Sembra difficile riuscire a capire per quali funzioni di penalizzazione la stima di efficienza (5.1.9) per l'algoritmo della sezione 4.10 venga ottimizzata. Anche assumendo di riuscire a ottimizzare la stima, in generale fissata una specifica funzione di penalizzazione si riescono a dare stime migliori sfruttando la proprietà della particolare funzione di penalizzazione, come viene fatto in [3] per funzioni quadratiche. Resta dunque aperto il problema di capire quali scelte del termine di penalizzazione ottimizzano la convergenza. Può essere interessante anche studiare meglio la gestione dei bundle primale e duale: in teoria sia nel primo che nel secondo algoritmo questi possono avere molti elementi, però mancano considerazioni su come si possa velocizzare la convergenza rispetto al caso della gestione minimale.

L'algoritmo presentato nella sezione 4.8 richiede che f sia strettamente convessa, ipotesi che lo rende irrilevante per molte applicazioni. Resta anche da capire se sia possibile quantificare la relazione tra stretta convessità e velocità di convergenza dell'algoritmo. Infine, con algoritmi proximal basati su NS e SS in [4] si arriva a risultati di convergenza molto più forti. Non è chiaro né se le ipotesi qui utilizzate possono essere rimpiazzate da

ipotesi significativamente più deboli, né quali siano ipotesi aggiuntive per ottenere risultati più forti. Un esempio interessante in questo senso è l'ipotesi di lipschitzianità usata nel teorema di convergenza [4.9.1](#), per la quale l'autore non ha trovato un controesempio che ne dimostri la necessità.

A. Nozioni preliminari

Vengono qui richiamati brevemente alcune definizioni e risultati di base dell'analisi convessa. Viene trattato solo il caso di funzioni convesse definite su \mathbb{R}^n , l'unico direttamente rilevante per gli algoritmi presentati. Per completezza sono riportate alcune dimostrazioni, utili anche ad illustrare i metodi di dimostrazione elementari usati nel resto dell'elaborato. Trattandosi di teoremi ben noti, nelle dimostrazioni talvolta viene tralasciata qualche semplice verifica.

Per approfondimenti e generalizzazioni dei risultati proposti, il lettore interessato può consultare [8] e [9].

Per quanto riguarda la notazione, verrà indicata con $B_\delta(x)$ la palla di centro x e raggio δ , con $\mathbb{R}_{>0}$ l'insieme dei reali positivi strettamente maggiori di 0, e con $\mathbb{R}_{\geq 0}$ l'insieme $\mathbb{R}_{>0} \cup \{0\}$.

A.1 Teoremi di separazione

I teoremi di separazione formalizzano l'intuizione geometrica che due insiemi convessi disgiunti possono essere separati da un piano. Questi teoremi sono alla base di molti risultati di analisi convessa, e nell'ottimizzazione convessa sono usati per definire alcuni problemi duali. Qui saranno usati per dimostrare l'esistenza di un sottogradienti per funzioni convesse e per motivare l'algoritmo del piano di taglio.

Vengono innanzitutto ricordate alcune definizioni di base dell'analisi convessa:

Definizione A.1.1. *Un sottoinsieme C di \mathbb{R}^n è*

- *affine se*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathbb{R}^n \text{ per ogni } x, y \in C \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}$$

- *convesso se*

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathbb{R}^n \text{ per ogni } x, y \in C \text{ e } \lambda \in [0, 1]$$

- un cono se

$$\lambda x \in \mathbb{R} \text{ per ogni } x \in C \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$$

Dati due insiemi C e D si definisce $C - D$ come l'insieme $\{x - y : x \in C, y \in D\}$. Si assuma ora che C e D siano convessi. È facile verificare che $C + D$ è convesso; inoltre, se D è convesso allora $-D$ è convesso, e quindi anche $C - D$ è convesso. Osservazioni completamente analoghe si possono fare per C e D affini.

Definizione A.1.2. *Se C è un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R}^d , si definiscono aff C , conv C e cone C come l'intersezione di tutti gli insiemi affini, degli insiemi convessi o dei coni rispettivamente contenenti C .*

Proposizione A.1.1. *Valgono le seguenti uguaglianze:*

$$\begin{aligned} \text{aff } C &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in C, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\} \\ \text{conv } C &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x_i \in C, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\} \\ \text{cone } C &= \{ \lambda x : \lambda \in \mathbb{R}_{>0}, x \in C \} \end{aligned}$$

Definizione A.1.3. *La parte interna relativa $\text{ri } C$ di C è il sottoinsieme dei punti x di C per i quali esiste un intorno aperto U tale che $U \cap \text{aff } C \subset C$. La frontiera relativa è $\text{rbd } C = C \setminus \text{ri } C$*

Parti interne (eventualmente relative) e chiusure di coni e insiemi convessi sono a loro volta coni o insiemi convessi rispettivamente.

Definizione A.1.4. *Un semispazio A di \mathbb{R}^d è un insieme della forma*

$$A = \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot z \geq c\} \text{ per qualche } z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \text{ e } c \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1.1})$$

Il primo teorema di separazione (da [8, Teorema 1.2.2]) tratta il caso di insiemi convessi con chiusure disgiunte.

Teorema A.1.2. (Separazione forte)

Siano C e D sottoinsiemi convessi non vuoti di \mathbb{R}^d . Allora esiste $z \in \mathbb{R}^d$ tale che

$$\inf_{x \in C} x \cdot z > \sup_{y \in D} y \cdot z \quad (\text{A.1.2})$$

se e solo se $0 \notin \text{cl } C - D$.

Dimostrazione. Il solo se è evidente. Per l'altra freccia, poichè $C - D$ è chiuso esiste un unico $z \in C - D$ di norma minima, e questo z è unico per la stretta convessità della norma. Dato un qualsiasi $d \in C - D$, sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel seguente modo per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda) = \|\lambda d + (1 - \lambda)z\|^2 \tag{A.1.3}$$

Poiché f è un polinomio di secondo grado con minimo in 0 se ristretta a $[0, 1]$, $f'(0) > 0$. Ma la (A.1.3) implica che

$$f'(\lambda) = 2(d - z) \cdot (\lambda d + (1 - \lambda)z)$$

e quindi $f'(0) > 0$ se e solo se $z \cdot d \geq \|z\|^2 > 0$ per ogni $d \in C - D$, da cui segue la (A.1.2). \square

Osservazione. Il teorema appena dimostrato implica l'esistenza di un semispazio contenente C e disgiunto da D : nella (A.1.4) basta considerare lo z della (A.1.3) e un qualsiasi c compreso tra $\inf_{x \in C} x \cdot z$ e $\sup_{y \in D} y \cdot z$.

Corollario A.1.3. *Ogni sottoinsieme C convesso e chiuso di \mathbb{R}^n è uguale all'intersezione di tutti i semispazi che lo contengono.*

Dimostrazione. Per definizione tale intersezione contiene C . Inoltre, dato un generico punto x in \mathbb{R}^n , la differenza $C - \{x\}$ soddisfa le ipotesi del teorema A.1.2, quindi esiste un semipiano che contiene C ma non $\{x\}$, da cui la tesi. \square

Per trattare il caso in cui le parti interne dei domini di C e D non si intersecano, procedendo come in [8, Teorema 1.2.9] verranno usati i seguenti lemmi, i quali dimostrano che se un cono non è tutto \mathbb{R}^n allora è contenuto in un semispazio.

Lemma A.1. *Sia C un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^n , p e q due punti in $\text{ri } C$ e $\text{cl } C$ rispettivamente. Allora $\lambda q + (1 - \lambda)p \in \text{ri } C$ per $\lambda \in (0, 1]$.*

Dimostrazione. A meno di isomorfismi tra \mathbb{R}^m e il sottospazio di dimensione m di \mathbb{R}^n aff C si può supporre $p \in \text{int } C$. Sia ε tale che $B_\varepsilon(p) \subseteq C$, $q' = q + \mu \in C$. Allora fissato $\lambda \in (0, 1]$, per ogni $r \in B_\varepsilon(0)$

$$\lambda(q + \mu) + (1 - \lambda)(p + r) \in C$$

o in altri termini $B_{\varepsilon'}(\lambda(q + \mu) + (1 - \lambda)p) \subseteq C$ dove $\varepsilon' = (1 - \lambda)\varepsilon$. In particolare per $\|\mu\| < \frac{(1-\lambda)}{\lambda}\varepsilon$ si ha che

$$\lambda q + (1 - \lambda)p \in B_{\varepsilon'}(\lambda(q + \mu) + (1 - \lambda)p) \subseteq C$$

da cui la tesi. \square

Lemma A.2. *Sia C un cono convesso non vuoto di \mathbb{R}^n tale che $0 \notin \text{int } C$. Allora esiste $z \in \mathbb{R}^n$ tale che*

$$\inf_{x \in C} z \cdot x = 0 \quad (\text{A.1.4})$$

Dimostrazione. Se $\text{aff } C \neq \mathbb{R}^n$ allora basta considerare un qualsiasi z ortogonale ad $\text{aff } C$. Altrimenti esiste $p \in \text{int } C$, e per il lemma A.1 $-p \notin \text{cl } C$. Quindi per il teorema di separazione forte esiste z tale che $z \cdot (-p) \leq z \cdot x$ per ogni x in C , e in particolare essendo C un cono deve valere la (A.1.4). \square

Teorema A.1.4. (separazione debole)

Siano C, D sottoinsiemi non vuoti e convessi di \mathbb{R}^n . Allora esiste z in \mathbb{R}^d tale che

$$\inf_{x \in C} x \cdot z \geq \sup_{y \in D} y \cdot z \quad (\text{A.1.5})$$

se e solo se $0 \notin \text{int } C - D$.

Dimostrazione. Il solo se è chiaro. Per l'altra implicazione, innanzitutto considerato cone $C - D$ si ha $0 \notin \text{int}(\text{cone } C - D)$ perché $0 \notin \text{int } C - D$. Ma per il lemma A.2 esiste allora uno z che soddisfa la (A.1.4) per il cono $C - D$ e di conseguenza la (A.1.5) per i coni C e D . \square

Corollario A.1.5. *Dato un sottoinsieme convesso C di \mathbb{R}^n per ogni punto x_0 in $C \setminus \text{int } C$ esiste $z \in \mathbb{R}^n$ tale che il semispazio di equazione $x \cdot z \geq x_0 \cdot z$ contiene C .*

Dimostrazione. $C - x_0$ soddisfa le ipotesi del teorema A.1.4, che quindi si può applicare agli insiemi convessi C e x_0 . \square

Nella situazione appena presentata nel corollario si dice che z supporta C in x_0 .

Il teorema di separazione debole fornisce un risultato banale nel caso in cui esista un iperpiano contenente sia C che D , perché in questo caso tale iperpiano è separante secondo la (A.1.4), poiché vale l'uguaglianza. Il terzo teorema di separazione (da [8, Teorema 1.2.14]) garantisce invece l'esistenza di un iperpiano contenente punti di C o D al suo interno nel caso in cui le parti interne relative di D e di C non si intersechino:

Teorema A.1.6. (separazione propria)

Siano C, D sottoinsiemi non vuoti e convessi di \mathbb{R}^n . Allora esiste z in \mathbb{R}^d tale che

$$\inf_{x \in C} x \cdot z \geq \sup_{y \in D} y \cdot z \quad \sup_{x \in C} x \cdot z > \inf_{y \in D} y \cdot z \quad (\text{A.1.6})$$

se e solo se $0 \notin \text{ri } C - D$.

Dimostrazione. Sia $\mathbb{R}^n = M + M^\perp$, con $M = \text{aff } C - D$ e M^\perp sottospazio di \mathbb{R}^n perpendicolare a M .

Se $0 \in \text{ri } C - D$, si assuma per assurdo che esista z tale da soddisfare la (A.1.6). Sia $z = v_1 + v_2$ con $v_1 \in M$ e $v_2 \in M^\perp$. Considerando la (A.1.6) solo per lo spazio M , si ottiene che v_1 deve in particolare soddisfare l'equazione (A.1.5) del teorema di separazione debole, quindi $v_1 = 0$. Ma in questo caso la seconda delle equazioni (A.1.6) non può essere soddisfatta da z , assurdo.

Se $0 \notin \text{ri } C - D$, sia $v_1 \in M/\{0\}$ tale da soddisfare l'equazione (A.1.5) di separazione debole ristretta al sottospazio M . Per definizione di M esiste $x \in C - D$ non appartenente al sottospazio perpendicolare a v_1 , ovvero tale che $x \cdot v_1 \neq 0$. Allora v_1 soddisfa le equazioni (A.1.6). \square

A.2 Funzioni convesse e sottodifferenziale

Viene ora data la definizione di funzioni convesse nella sua versione più moderna, secondo la quale una funzione convessa è sempre definita su tutto \mathbb{R}^n ed ha valori in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definizione A.2.1. *Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ viene chiamata convessa se*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (\text{A.2.1})$$

per ogni x, y in \mathbb{R}^n e λ in $(0, 1)$. Si definisce $\text{dom } f$ l'insieme dei punti x per i quali $f(x) \neq \infty$.

Notare che $\text{dom } f$ è un insieme convesso, in quanto se $f(x)$ e $f(y)$ sono entrambi diversi da ∞ , allora $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) < \infty$.

In generale anche se f può assumere il valore $\{\infty\}$ la definizione dell'epigrafo non cambia:

Definizione A.2.2. *Data $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ l'epigrafo di f è definito come*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}$$

e viene indicato con $\text{epi } f$.

Proposizione A.2.1. *Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ è convessa se e solo se il suo epigrafo è convesso.*

Poiché una funzione è semicontinua inferiormente se e solo se il suo epigrafo è chiuso, una funzione è convessa e semicontinua inferiormente se e solo se il suo epigrafo è convesso

e chiuso.

Per una funzione convessa la disuguaglianza (A.2.1) si può generalizzare per un numero arbitrario di punti, dando origine alla disuguaglianza di Jensen: se $\lambda \geq 0$ e $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ allora

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_i)$$

Dalla disuguaglianza di Jensen segue facilmente la semicontinuità superiore per i punti contenuti nella parte interna relativa. In generale infatti per ottenere la semicontinuità superiore in un punto x basta applicare tale disuguaglianza ai punti contenuti in un intorno convesso di x con finiti estremi. Si possono però dimostrare proprietà di continuità molto più forti (da [9, p. 74]):

Teorema A.2.2. *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ è una funzione convessa e K un compatto contenuto in $\text{ri}(\text{dom } f)$, allora f è Lipschitziana in K . In particolare, f è continua in $\text{ri}(\text{dom } f)$.*

Dimostrazione. A meno di isomorfismi tra \mathbb{R}^m e $\text{aff}(\text{dom } f)$ si può supporre senza perdita di generalità che $\text{aff}(\text{dom } f) = \mathbb{R}^n$.

Sia $x \in \text{int}(\text{dom } f)$, e $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$ una base di \mathbb{R}^n . Allora esiste $\mu > 0$ tale che l'insieme

$$A = \{x + \mu v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{x - \mu v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{x\}$$

è contenuto in $\text{dom } f$. Sia $M = \max\{|f(x)| \mid x \in A\}$. Per la continuità della funzione che associa ad un vettore di \mathbb{R}^n le sue coordinate in una base fissata, per ogni ε esiste δ tale che per ogni $y \in B_\delta(x)$

$$y = x + \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = s < \frac{\varepsilon}{\max\{\varepsilon, M + |f(x)|\}}$$

Sia $a_i = x + \text{sgn}(\lambda_i)v_i$ per $1 \leq i \leq n$. Allora per ogni $y \in B_\delta(x)$ si ha che

$$f(y) - f(x) = f((1-s)x + \sum_{i=1}^n |\lambda_i| a_i) - f(x) \leq -s f(x) + \sum_{i=1}^n |\lambda_i| f(a_i) \leq s(|f(x)| + M) < \varepsilon$$

e questo implica che f è semicontinua superiormente in $\text{int}(\text{dom } f)$. Dato $x \in \text{int}(\text{dom } f)$, sia δ tale che $\bar{B}_\delta(x) \subset \text{int}(\text{dom } f)$. Per la semicontinuità superiore di f esiste N massimo di f ristretta a $\bar{B}_\delta(x)$.

Per dimostrare che f è semicontinua inferiormente, si supponga per assurdo l'esistenza di $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ successione con limite x tale che $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = c < f(x)$. Sia $\delta' = \frac{f(x) - c}{2(N - f(x))}$ e i tale che $f(x) - f(x_i) > \frac{f(x) - c}{2}$ e $\|x - x_i\| \leq \delta'$.

Allora

$$f(x + \delta \frac{x-x_i}{\|x-x_i\|}) \geq f(x) + \frac{\delta}{\|x-x_i\|} (f(x) - f(x_i)) > N$$

assurdo per la definizione di N .

Sia ora K un compatto contenuto in $\text{int}(\text{dom } f)$. Allora esiste δ tale che il compatto $J = \bigcup_{x \in K} \bar{B}_\delta(x)$ è ancora contenuto in $\text{int}(\text{dom } f)$. Siano M ed m rispettivamente massimo e minimo di f ristretta a questo compatto. Siano $x, x' \in K$ e senza perdita di generalità si supponga $f(x') \leq f(x)$. Per convessità

$$f(x + \delta \frac{x-x'}{\|x-x'\|}) \geq f(x) + (f(x) - f(x')) \frac{\delta}{\|x-x'\|} \geq m + (f(x) - f(x')) \frac{\delta}{\|x-x'\|}$$

Poiché il massimo di f in J è M , la precedente disuguaglianza implica che

$$\frac{f(x) - f(x')}{\|x-x'\|} \leq \frac{M-m}{\delta}. \quad \square$$

Definizione A.2.3. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una funzione. Un elemento z di \mathbb{R}^n viene detto α -sottogradiente di f in x_0 se $\alpha \geq 0$ e

$$f(x_0 + x) \geq f(x_0) - \alpha + z \cdot (x - x_0) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.2.2})$$

L'insieme degli α -sottogradienti di f in x_0 viene indicato con $\partial_\alpha f(x_0)$. Per $\alpha = 0$ viene indicato con $\partial f(x_0)$ e chiamato sottodifferenziale di f in x_0 .

Analogamente a quanto si fa per il gradiente, anche per il sottogradiente si può dare una caratterizzazione usando gli o piccoli, come dimostrato dalla seguente proposizione. Per una trattazione esaustiva delle proprietà locali del sottogradiente, il lettore interessato può consultare [9, pp. 249-258].

Proposizione A.2.3. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una funzione convessa e sia $x \in \text{int}(\text{dom } f)$ (che si assume sia diverso dall'insieme vuoto). Sia $h \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(x + \varepsilon) \leq f(x) + h \cdot \varepsilon + o(\|\varepsilon\|) \text{ o } f(x + \varepsilon) \geq f(x) + h \cdot \varepsilon + o(\|\varepsilon\|) \quad (\text{A.2.3})$$

per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$. Allora $h \in \partial f(x)$.

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che esista $\varepsilon' \in \mathbb{R}^n$ tale che $f_{\varepsilon'} = f(x + \varepsilon') = f(x) + \varepsilon' \cdot h - \mu$, con $\mu > 0$. Per $\theta \in [0, 1]$, se $\varepsilon_\theta = \theta \varepsilon'$ allora $f(x + \varepsilon_\theta) \leq (1 - \theta)f(x) + \theta f_{\varepsilon'}$. Ma

$$\frac{f(x) + \varepsilon_\theta \cdot h - (f(x) + \theta(f_{\varepsilon'} - f(x)))}{\|\varepsilon_\theta\|} = \frac{\theta(\varepsilon' \cdot h - f(x + \varepsilon'))}{\theta \|\varepsilon'\|} = \frac{\mu}{\varepsilon'}$$

e quindi

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x) + \varepsilon \cdot h - f(x + \varepsilon)}{\|\varepsilon\|} \geq \frac{\mu}{\|\varepsilon'\|} > 0$$

contraddicendo la seconda equazione dell'ipotesi (A.2.3).

Inoltre, per $\theta \in (-\infty, 0)$, $f(x + \theta\varepsilon) \geq (1 - \theta)f(x) + \theta f_\varepsilon$. Quindi

$$\frac{f(x) + \theta\varepsilon \cdot h - (f(x) + \theta(f_{\varepsilon'} - f(x)))}{\|\theta\varepsilon'\|} = \frac{\theta(\varepsilon' \cdot h - f(x + \varepsilon'))}{-\theta\|\varepsilon\|} = -\frac{\mu}{\varepsilon}$$

da cui

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x) + \varepsilon \cdot h - f(x + \varepsilon)}{\|\varepsilon\|} \leq -\frac{\mu}{\|\varepsilon'\|} < 0$$

contraddicendo anche la prima equazione dell'ipotesi (A.2.3), assurdo. \square

Nel teorema appena visto vale anche l'altra freccia, ma questo è meno interessante perché chiaramente tra le due equazioni della (A.2.3) per un sottogradiente in generale vale solo la seconda.

Questa proposizione ha due corollari molto importanti. Il primo mostra la relazione tra differenziale e sottodifferenziale:

Corollario A.2.4. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una funzione convessa e sia $x \in \text{int}(\text{dom } f)$ tale che f sia differenziabile in x . Allora $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.*

Dimostrazione. Per definizione di ∇f , $f(x + \varepsilon) = f(x) + \varepsilon \cdot \nabla f(x) + o(\|\varepsilon\|)$ e quindi $\nabla f(x) \in \partial f(x)$. Se $z \in \partial f(x)$, allora esiste d tale che $z \cdot d > \nabla f(x) \cdot d$ e in particolare z non rispetta la prima equazione della (A.2.3) lungo la direzione d . \square

Il secondo mostra come i massimi di una funzione convessa stiano sempre sul bordo del dominio:

Corollario A.2.5. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una funzione convessa e sia $x \in \text{ri}(\text{dom } f)$ tale che $f(x) = \max_{y \in \text{dom } f} f(y) = M$. Allora f è la costante M se ristretta a $\text{dom } f$.*

Dimostrazione. A meno di isomorfismi si può supporre $\dim(\text{dom } f) = n$. Si ha che $f(x + \varepsilon) \leq f(x) + 0 \cdot \varepsilon$ per $x + \varepsilon$ in $\text{dom } f$. Allora $0 \in \partial f(x)$ per la proposizione A.2.3, e quindi $f(x) \geq f|_{\text{dom } f} \geq M = f(x)$. \square

Si può riscrivere l'equazione del sottogradiente (A.2.2) come

$$(-z, 1) \cdot (x, f(x_0 + x)) \geq (-z, 1) \cdot (x_0, f(x_0))$$

Dalla formula precedente si ha che equivalentemente alla definizione appena data z è un sottogradiente per f in x_0 se e solo se $(-z, 1)$ supporta l'epigrafo di f in $(x_0, f(x_0))$. Questo permette di applicare il teorema di separazione propria ad un punto sul grafico

di una funzione convessa e all'epigrafo della stessa per ottenere un importante teorema di esistenza del sottogradiente (da [8, Teorema 1.4.5]):

Teorema A.2.6. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una funzione convessa, $x_0 \in \text{ri}(\text{dom } f)$. Allora $\partial f(x_0) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $\text{epi } f$ l'epigrafo di f . 0 non appartiene alla parte interna dell'insieme $\text{epi } f - \{(x_0, f(x_0))\}$, perché esso non contiene $(0, -\varepsilon)$ per ogni $\varepsilon > 0$. Si può allora applicare il teorema di separazione propria a $\text{epi } f$ ed $\{(x_0, f(x_0))\}$, ottenendo l'esistenza di un vettore $(-z, v)$ tale che valgano le due equazioni

$$\inf_{(x,c) \in \text{epi } f} (-z, v) \cdot (x, c) \geq (-z, v) \cdot (x_0, f(x_0))$$

$$\sup_{(x,c) \in \text{epi } f} (-z, v) \cdot (x, c) > (-z, v) \cdot (x_0, f(x_0))$$

In particolare il lato destro della prima disuguaglianza deve essere diverso da $-\infty$, per cui $v \geq 0$. Se per assurdo fosse $v = 0$, poiché $x \in \text{ri}(\text{dom } f)$ per la prima equazione di separazione propria si avrebbe

$$-z \cdot x = -z \cdot x_0 \text{ per ogni } x \in \text{aff}(\text{dom } f)$$

contraddicendo così la seconda equazione di separazione. Allora $v > 0$ e si possono dividere entrambi i lati della prima equazione di separazione propria per v , ricavando la condizione per cui $\frac{z}{v}$ è un sottogradiente di f in x_0 . \square

Nella dimostrazione precedente, si usa l'ipotesi $x \in \text{ri}(\text{dom } f)$ solo per dimostrare $v \neq 0$, ossia che l'iperpiano separante non è verticale e corrisponde ad una funzione. Questo significa che in generale per punti in $\text{rbd}(\text{dom } f)$ esiste ancora un iperpiano separante, eventualmente verticale. In effetti se $f(x) = -\sqrt{x}$ per $x \geq 0$ allora $\partial f(0) = \emptyset$ ma l'iperpiano $(x, y)(1, 0) = 0$ è separante per l'epigrafo di f e il punto $(0, 0)$.

In maniera completamente analoga al teorema appena visto si può dimostrare la seguente generalizzazione (da [7, p. 43]):

Teorema A.2.7. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una funzione convessa. Sia h_X una funzione affine definita su un sottoinsieme affine X di \mathbb{R}^n tale che $h_X \leq f|_X$. Si assuma inoltre che $\text{ri}(\text{dom } f) \cap X \neq \emptyset$. Allora esiste una funzione affine h definita su tutto \mathbb{R}^n tale che $h|_X = h_X$ e $h \leq f$.*

Il seguente risultato (da [8, Teorema 1.4.11]) serve a dimostrare che f si può approssimare arbitrariamente bene con funzioni affini anche fuori dalla parte interna relativa del suo dominio. Questo giustifica in qualche modo la scelta di molti metodi di ottimizzazione

di usare come approssimazione inferiore di f il massimo di funzioni affini associate a dei sottogradienti.

Teorema A.2.8. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ una funzione convessa e semicontinua inferiormente. Allora f è uguale al sup delle funzioni affini strettamente minori di f .*

Dimostrazione. Se $\text{dom } f = \emptyset$ allora la tesi è banale.

Altrimenti, sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \text{epi } f$. La tesi equivale a dimostrare che per ogni sifatto (x_0, y_0) esiste una funzione affine minore di f ma il cui epigrafo non contiene $\{(x_0, y_0)\}$. Per il teorema di separazione forte esiste (z, v) tale che

$$\inf_{(x,y) \in \text{epi } f} x \cdot z + yv = c_0 > x_0 \cdot z + y_0v = d_0 \quad (\text{A.2.4})$$

Dalla precedente equazione si ha $v \geq 0$. Se $v > 0$ allora la funzione affine associata all'iperpiano $(\frac{z}{v}, 1) \cdot (x, y) \geq \frac{c_0}{v}$ è minore di f e il suo epigrafo non contiene (x_0, y_0) . Si supponga per assurdo di avere $v = 0$ per tutti gli (z, v) che soddisfano (A.2.4). Sia $x_1 \in \text{dom } f$. Allora $(x_1, f(x_1) - 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}/\text{epi } f$. Per il teorema di separazione forte esiste (z', v') tale che

$$\inf_{(x,y) \in \text{epi } f} x \cdot z' + yv' = c_1 > x_1 \cdot z' + (f(x_1) - 1)v' \quad (\text{A.2.5})$$

e $x_1 \in \text{dom } f$ implica che $v' > 0$.

Sia $d_1 = (z', v') \cdot (x_0, y_0)$, e siano $\lambda_0 = d_1 - c_1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, $\lambda_1 = c_0 - d_0$. Da queste definizioni segue subito che $\lambda_i \geq 0$ per $i \in \{0, 1\}$ e che $\lambda_0 c_0 + \lambda_1 c_1 > \lambda_0 d_0 + \lambda_1 d_1$. Allora combinando le disuguaglianze (A.2.4) e (A.2.5) moltiplicate per i coefficienti λ_0 e λ_1 rispettivamente si ha che la funzione affine associata all'iperpiano di equazione

$$(\lambda_0(z, v) + \lambda_1(z', v')) \cdot x \geq \lambda_0 c_0 + \lambda_1 c_1$$

è minore di f e il suo epigrafo non contiene $\{(x_0, y_0)\}$. □

Essendo il sottodifferenziale un insieme per ogni punto, per lo studio delle sue proprietà di continuità è utile definire una semicontinuità inferiore e una semicontinuità superiore per funzioni con valori nell'insieme delle parti di \mathbb{R}^n , che verrà indicato con $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Definizione A.2.4. *Sia $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Si dice che F è semicontinua superiormente in \bar{x} se per ogni successione $\{(x_k, s_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $s_k \in F(x_k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e che se $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, s_k) = (\bar{x}, \bar{s})$ allora $\bar{s} \in F(\bar{x})$. F viene detta semicontinua inferiormente in \bar{x} se per ogni $\bar{s} \in M(\bar{x})$ ed ogni successione $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente ad \bar{x} esiste una successione $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a \bar{s} tale che $s_k \in F(x_k)$ per ogni k . F è detta continua se è sia semicontinua inferiormente che semicontinua superiormente.*

Tutti i risultati su continuità e limitatezza enunciati sono tratti da [7, pp. 12-13]. Non verrà dimostrato il risultato di semicontinuità inferiore, che non viene usato negli algoritmi presentati in questa trattazione.

Il seguente teorema ha tra le immediate conseguenze la semicontinuità superiore di $\partial_\varepsilon f$ per ogni $\varepsilon \geq 0$.

Teorema A.2.9. *Sia f una funzione convessa definita su \mathbb{R}^n , $\bar{x} \in \text{dom } f$, $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione contenuta in \mathbb{R}^n con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_i = \bar{x}$, $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione contenuta in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ con $\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i = \varepsilon$, $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tale che per ogni i $s_i \in \partial_{\varepsilon_i} f(x_i)$ e tale che esista $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = s$.*

Se $\limsup_{i \rightarrow \infty} f(x_i) \geq f(\bar{x})$, allora $s \in \partial_\varepsilon f(\bar{x})$.

Dimostrazione. Per ogni i e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ per ipotesi vale

$$f(x_i) - \varepsilon_i + (\bar{x} - x_i) \cdot s_i \leq f(x)$$

Passando al \limsup in entrambi i lati della precedente disuguaglianza e usando che $\limsup_{i \rightarrow \infty} f(x_i) \geq f(\bar{x})$ si ottiene

$$f(\bar{x}) - \varepsilon + (x - \bar{x}) \cdot s \leq f(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. □

Corollario A.2.10. *$\partial_\varepsilon f(x)$ è semicontinua superiormente in x per ogni x in $\text{ri}(\text{dom } f)$.*

Dimostrazione. Segue dal teorema appena visto fissando $\varepsilon_i = \varepsilon$ per ogni i e dalla continuità di f in $\text{ri}(\text{dom } f)$. □

In [7], viene dimostrato anche che se $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ è definita da

$$F(x, \varepsilon) = \partial_\varepsilon f(x)$$

allora F è continua in $\text{ri}(\text{dom } f)$, e in particolare che se $x, x' \in K$ compatto dove f ha come costante di Lipschitz L , $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, $s \in \partial_\varepsilon f(x)$ allora esiste $s' \in \partial_{\varepsilon'} f(x')$ tale che

$$\|s - s'\| \leq \frac{L}{\min\{\varepsilon, \varepsilon'\}} (\|x - x'\| + |\varepsilon - \varepsilon'|)$$

Invece in generale $\partial f(x)$ non è semicontinua inferiormente. Ad esempio è facile verificare che se $f(x) = |x|$ allora $\partial f(x)$ non è semicontinua inferiormente in 0.

Proprio come per funzioni differenziabili e lipschitziane la norma del differenziale in un punto è sempre limitata dalla costante di Lipschitz, per funzioni lipschitziane e convesse anche il sottogradiente sotto opportune ipotesi ha norma limitata ([7, Lemma 6.1]).

Teorema A.2.11. *Sia f una funzione convessa definita su \mathbb{R}^n e sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che f sia Lipschitziana con costante L su $\bigcup_{x \in X} \bar{B}_\delta(x)$, dove $\delta > 0$. Allora per ogni $\varepsilon \geq 0$, per ogni $x \in X$*

$$s \in \partial_\varepsilon f(x) \Rightarrow \|s\| \leq L + \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Dimostrazione. Sia $s \in \partial_\varepsilon f(x)$ con $x \in X$. Poiché f è Lipschitziana con costante L su $\bar{B}_\delta(x)$,

$$f\left(x + \delta \frac{s}{\|s\|}\right) \leq f(x) + L\delta$$

e poiché $s \in \partial_\varepsilon f(x)$

$$f(x) - \varepsilon + s \cdot \frac{s\delta}{\|s\|} = f(x) - \varepsilon + \|s\|\delta \leq f\left(x + \delta \frac{s}{\|s\|}\right)$$

Stimando $f\left(x + \delta \frac{s}{\|s\|}\right)$ con la precedente disuguaglianza si ottiene $-\varepsilon + \|s\|\delta \leq L\delta$. \square

In particolare se X è un compatto contenuto in $\text{int}(\text{dom } f)$ esiste sempre un $\delta > 0$ tale che l'unione delle palle chiuse di raggio δ con centro appartenente ad X è un compatto contenuto in $\text{int}(\text{dom } f)$. Il teorema A.2.2 garantisce inoltre che f sia lipschitziana, quindi il teorema appena dimostrato si può applicare ad X , ottenendo ad esempio che per ogni $x \in X$ e $z \in \partial f(x)$ se L è la costante di Lipschitz di f allora $\|z\| \leq L$.

Corollario A.2.12. *Sia f una funzione convessa definita su \mathbb{R}^n e sia $A \subseteq \text{int}(\text{dom } f)$ un aperto dove f è differenziabile. Allora il differenziale $\nabla f(x)$ è continuo in A .*

Dimostrazione. Sia $\bar{x} \in A$ e δ tale che $\bar{B}_\delta(\bar{x}) \subseteq A$. Per il teorema A.2.11 esiste L tale che $\|\nabla f(x)\| \leq L$ per ogni $x \in \bar{B}_\delta(\bar{x})$. Sia $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione contenuta in $\bar{B}_\delta(\bar{x})$. La successione $\{\nabla f(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ è limitata in norma e per il teorema A.2.9 tutte le sottosuccessioni convergenti devono convergere a $\nabla f(x)$, e questo implica che la successione stessa converge a $\nabla f(x)$. \square

B. Moduli di continuità

Nella trattazione dei metodi bundle generalizzati viene usato qualche risultato sui moduli di continuità. Per approfondimenti e generalizzazioni dei risultati proposti, il lettore interessato può consultare [10].

Definizione B.0.1. *Un modulo di continuità è una funzione*

$w : \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ tale che

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} w(\delta) = w(0) = 0$$

Data una funzione uniformemente continua f le si può associare un modulo di continuità che fornisca in qualche modo informazioni sulla massima variazione che f può avere tra due punti a distanza fissata. Nel resto della tesi verrà usato il seguente modulo di continuità:

Definizione B.0.2. *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione uniformemente continua.*

Allora si definisce modulo di continuità standard di f la funzione

$m_f : \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ tale che

$$m_f(\delta) = \sup\{\|f(x) - f(y)\| \mid x, y \in X, \|x - y\| \leq \delta\}$$

Con questa definizione m_f ha diverse proprietà interessanti:

Proposizione B.0.1. (1) *m_f è un modulo di continuità debolmente crescente.*

(2) *Se X è convesso allora $m_f(\delta_1 + \delta_2) \leq m_f(\delta_1) + m_f(\delta_2)$ per ogni $\delta_1, \delta_2 \geq 0$.*

(3) *Se X è convesso m_f è uniformemente continua con modulo di continuità standard uguale ad m_f .*

(4) *Se X è connesso ed f non è costante allora $m_f(\delta) > 0$ per ogni $\delta > 0$.*

Dimostrazione. (1) È evidente dalla definizione che m_f è non negativa e debolmente crescente. f è uniformemente continua e quindi per ogni ε esiste δ tale che $m_f(\delta) \leq \varepsilon$,

da cui siccome m_f è debolmente crescente $\lim_{\delta \rightarrow 0} m_f(\delta) = 0$.

(2) Siano x, y tali che $\|x - y\| \leq \delta_1 + \delta_2$. Allora per la convessità di X esiste z tale che $\|x - z\| \leq \delta_1$ e $\|y - z\| \leq \delta_2$. Quindi

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \leq m_f(\delta_1) + m_f(\delta_2)$$

e passando al sup su tutti gli x e gli y tali che $\|x - y\| \leq \delta_1 + \delta_2$ si ottiene la tesi.

(3) $m_f(\delta) - m(0) = m_f(\delta)$ implica che $m_{m_f}(\delta) \geq m_f(\delta)$. Per la disuguaglianza opposta, siano $\delta_1 \leq \delta_2$ reali non negativi. Allora per la proprietà (2) $|m_f(\delta_1) - m_f(\delta_2)| = m_f(\delta_2) - m_f(\delta_1) \leq m_f(\delta_2 - \delta_1)$, da cui la tesi.

(4) Si assuma per assurdo che X sia connesso, f non sia costante ed esista $\delta > 0$ tale che $m_f(\delta) = 0$. Sia $x' \in X$ tale che $f(x') = y$. Allora gli insiemi $\{x \in X \mid f(x) = y\}$ e $\{x \in X \mid f(x) \neq y\}$ sono aperti e la loro unione è X , assurdo. \square

Poiché m_f è debolmente crescente non sempre esiste una funzione inversa, ma si può comunque definire un'inversa generalizzata:

Definizione B.0.3. *Dato un modulo di continuità debolmente crescente m la sua inversa generalizzata è la funzione $m_*^{-1} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tale che:*

$$m_*^{-1}(\varepsilon) = \inf\{\delta \in \mathbb{R} \geq 0 \mid m(\delta) \geq \varepsilon\}$$

Anche l'inversa generalizzata del modulo di continuità ha delle proprietà interessanti:

Proposizione B.0.2. *Sia m un modulo di continuità debolmente crescente. Allora:*

- (1) m_*^{-1} è debolmente crescente e $m_*^{-1}(0) = 0$.
- (2) Se $m(\delta) > 0$ per $\delta > 0$ allora $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_*^{-1}(\varepsilon) = 0$.
- (3) $m_*^{-1}(\varepsilon) > 0$ per ogni $\varepsilon > 0$.
- (4) Se $n(\delta) = k_1 m(k_2 \delta)$ con $k_1, k_2 > 0$. Allora

$$n_*^{-1}(\varepsilon) = \frac{1}{k_2} m_*^{-1}\left(\frac{1}{k_1} \varepsilon\right) \tag{B.0.1}$$

Dimostrazione. (1) Immediata conseguenza della debole decrescenza di m e di $m(0) = 0$.

(2) Per definizione $m_*^{-1}(m(\delta)) \leq \delta$ per ogni $\delta > 0$. Quindi preso $\varepsilon = m(\delta) > 0$, $m_*^{-1}(\varepsilon) \leq \delta$ per ogni $\varepsilon' \leq \varepsilon$, da cui la tesi.

(3) Per ogni δ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $m(\varepsilon) < \delta$, ma questo implica che $m_*^{-1}(\delta') > \varepsilon$ per ogni $\delta' \geq \delta$.

(4) Innanzitutto $n\left(\frac{1}{k_2} m_*^{-1}\left(\frac{1}{k_1} \varepsilon\right)\right) = k_2 m\left(m_*^{-1}\left(\frac{1}{k_1} \varepsilon\right)\right)$. Sia $m_*^{-1}\left(\frac{1}{k_1} \varepsilon\right) = s$. Se $s' > s$ allora

$m(s') \geq \frac{1}{k_1}\varepsilon$. Se $s' < s$ allora $m(s') < \frac{1}{k_1}\varepsilon$, e pertanto $s = \inf\{s' \mid n(\frac{s'}{k_2}) \geq \varepsilon\} \Rightarrow n_*^{-1}(\varepsilon) = \frac{s}{k_2}$. \square

Bibliography

- [1] J. E. Kelley. The cutting-plane method for solving convex programs. *SIAM*, 8(4):703–712, Dicembre 1960. URL <http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0108053?journalCode=smjmap.1>.
- [2] D. B. Yudin A. S. Nemirovsky. *Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization*. John Wiley & Sons Ltd, 1983.
- [3] A. Fuduli e E. Gorgone A. Astorino, A. Frangioni. A nonmonotone proximal bundle method with (potentially) continuous step decisions. *SIAM J. Optim.*, 23(3):1784–1809, Settembre 2013. URL <http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/120888867>.
- [4] A. Frangioni. Generalized bundle methods. *SIAM J. Optim.*, 13(1):117–156, Giugno 2002. URL <http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S1052623498342186?journalCode=sjope8>.
- [5] Claude Lemaréchal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms II*. Springer Verlag, 1993.
- [6] E. A. Nurminski. Separating plane algorithms for convex optimization. *Mathematical Programming*, 76(3):373–391, Marzo 1997. URL <http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02614389>.
- [7] Alexandre Belloni. Introduction to bundle methods. Febbraio 2005. URL <https://faculty.fuqua.duke.edu/~abn5/LecturesIntroBundle.pdf>.
- [8] Andreas Hamel Patrick Cheridito. Convex analysis. 2013. URL <https://www.princeton.edu/~dito/CA2013.pdf>.
- [9] Claude Lemaréchal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*. Springer Verlag, 1993.
- [10] G. Choquet. *Cours D'analyse Tome II: Topologie*. Masson et Cie, 1969.